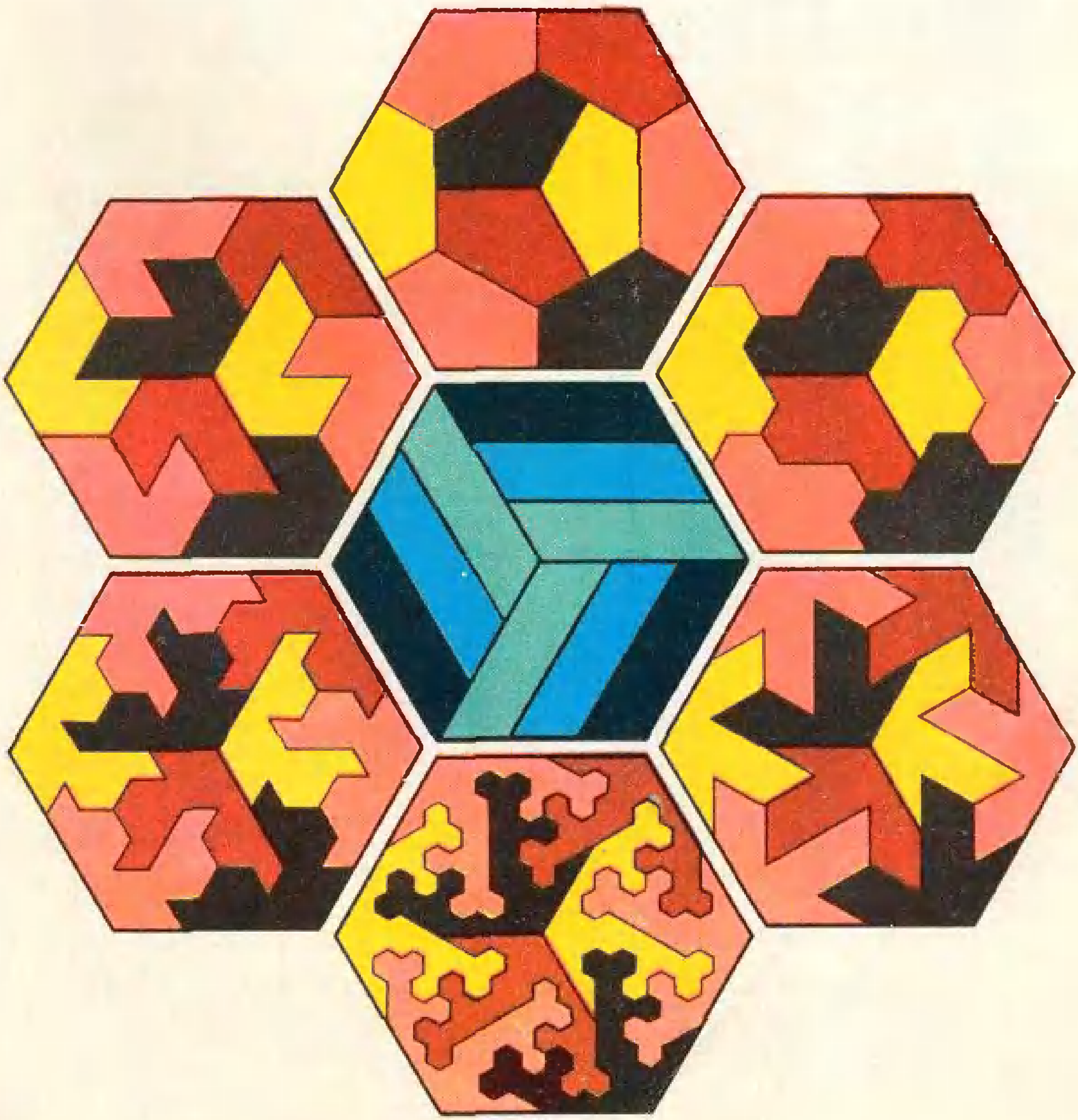
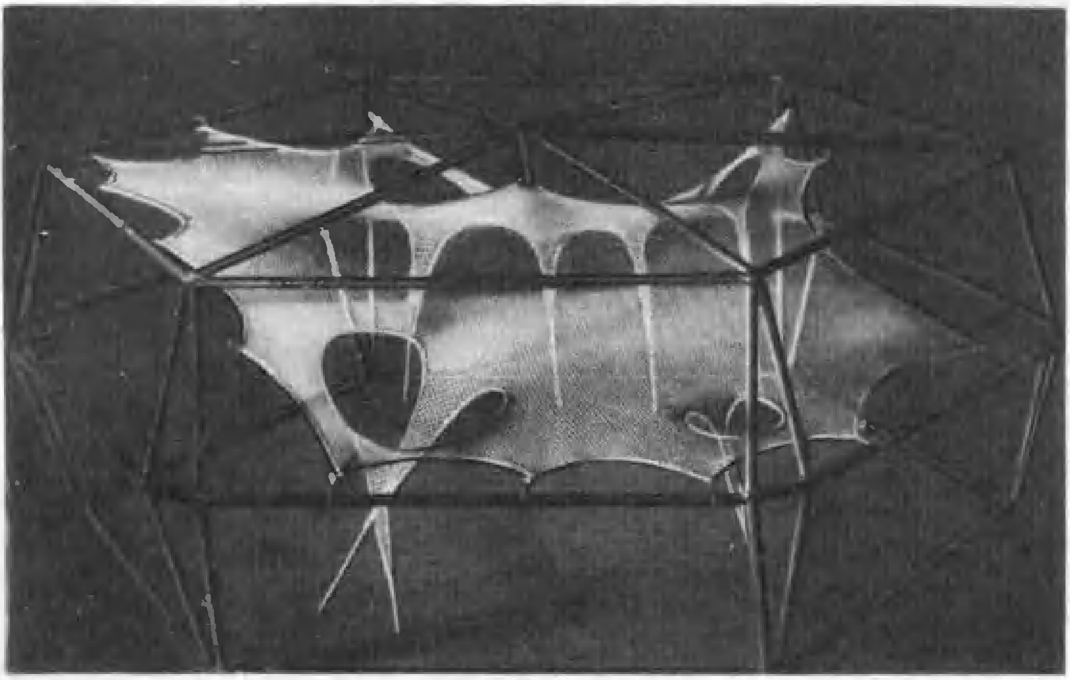
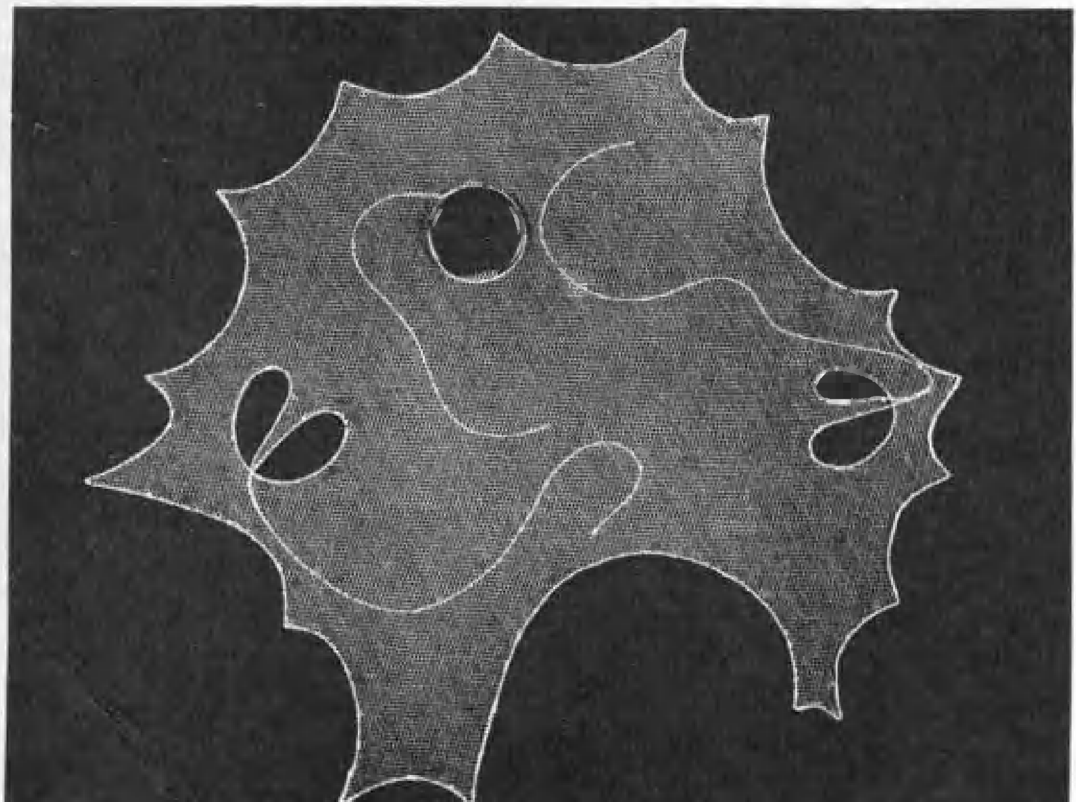
КВАНТ

11
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР







На этой фотографии изображены объемная сетчатая модель и плоская развертка, по которым были выполнены декоративные композиции в экспозиции советского павильона на Всемирной выставке ЭКСПО-75 в Японии (подробнее см. на с. 10).

Основан в 1970 году

КВАНТ

11
1978

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки приведено несколько разбиений правильного шестиугольника на девять конгруэнтных частей. О том, как получены эти разбиения, вы можете прочитать на с. 16

Е. Бланк

Линейные и нелинейные физические системы

Явления, происходящие в физических системах, количественно описываются уравнениями, выражающими функциональные зависимости между различными физическими величинами. Характер этих зависимостей может быть самым разнообразным. Значительную группу среди них составляют линейные зависимости типа $y=f(x)=ax+b$, где a и b считаются постоянными. Очень часто соответствующим подбором системы отсчета, системы координат или начальных условий зависимость такого вида можно свести к прямой пропорциональности.

Примеров прямой пропорциональной зависимости между физическими величинами очень много. Так связаны между собой модуль силы упругости и величина деформации: $|\vec{F}|=kx$; заряд конденсатора и напряжение на нем: $q=CU$; напряжение на концах проводника и сила тока, текущего по проводнику: $U=RI$; поток магнитной индукции, пронизывающий контур, и сила тока в контуре $\Phi=LI$ и т. д. Коэффициенты пропорциональности в этих формулах — жесткость k, емкость C, сопротивление R, индуктивность L — постоянные величины, которые характеризуют свойства данной системы.

Когда свойства физической системы (например, сопротивление цепи) не зависят от ее состояния (от тока, текущего по цепи), говорят, что система линейна. В линейных системах соблюдается принцип суперпозиции: в результате нескольких одновременных воздействий система приходит в такое же состояние, как если бы эти воздействия следовали порознь одно за другим. Иными словами, результат какого-либо одного воздействия в присутствии другого (или других) оказывается таким же, как если бы это другое воздействие отсутствовало. Так, например, если в результате действия груза массы m_1 удлинение пружины равно x_1, а в результате действия груза массы m_2 удлинение равно x_2, то подвешенные к пружине оба груза (m_1+m_2) вызовут удлинение x_1+x_2.

На рисунке 1 приведены графики зависимости падения напряжения на резисторе с постоянным сопротивлением от тока (вольтамперная характеристика резистора, рис. 1, *а*), заряда конденсатора с постоянной емкостью от напряжения на его пластинах (кулонвольтная характеристика конденсатора, рис. 1, *б*), потока магнитной индукции через контур с

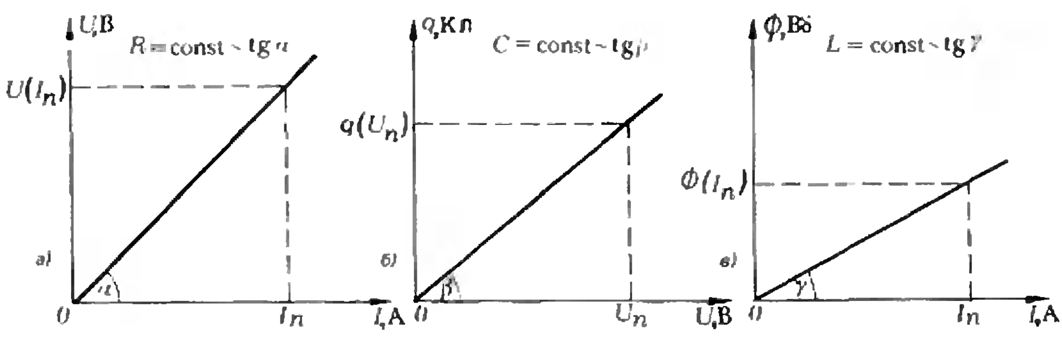


Рис. 1.

постоянной индуктивностью от тока (веберамперная характеристика катушки, рис. 1, *в*). Это — прямые линии; угол наклона каждой из них к оси абсцисс определяется, соответственно, *величиной* R, C *или* L. Нетрудно найти, что $R=U_I/I=\operatorname{tg}\alpha$, $C=q_U/U=\operatorname{tg}\beta$, $L=\Phi_I/I=\operatorname{tg}\gamma$. Элементы физических систем, характеристики которых задаются графически прямыми линиями, часто называют *линейными*.

Однако мы знаем, что многие постоянные характеристики физических систем остаются действительно постоянными лишь в определенных условиях — при определенных ограничениях на величину воздействия. Так, коэффициент жесткости пружины k постоянен лишь при небольших значениях амплитуды смещения; сопротивление проводника при больших токах начинает зависеть от величины тока (при больших токах проводник сильно нагревается, а сопротивление его, как известно, зависит от температуры). Если в конденсаторе используется диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряженности электрического поля, создаваемого зарядами пластин, то емкость такого конденсатора уже не есть постоянная величина. И индуктивность катушки может зависеть от тока, текущего по обмотке, если сердечник сделан из ферромагнетика — материала, магнитная проницаемость которого зависит от индукции магнитного поля, создаваемого током, текущим по обмотке.

Характеристики таких элементов уже не линейные; поэтому подобные элементы называют *нелинейными*, а содержащие их системы — *нелинейными системами*. Таким образом, нелинейные системы — это системы, свойства которых (например, сопротивление цепи) зависят от состояния системы (от тока, текущего по цепи).

Как «появляется» эта нелинейность, проще всего понять из такого примера. При значительных деформациях закон Гука, как известно, нарушается; величина жесткости k начинает зависеть от величины смещения. В тех пределах, когда смещение не намного превышает «упругое»

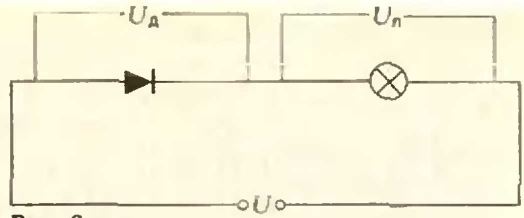


Рис. 2.

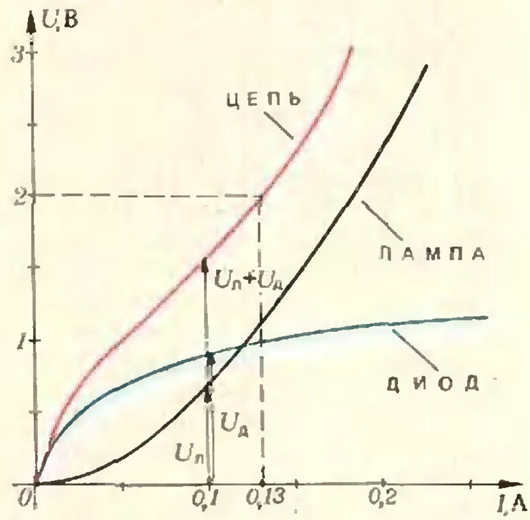


Рис. 3.

(то максимальное смещение, которое приводит еще к упругим деформациям), эту зависимость можно с хорошим приближением записать в виде $k=ax+b$. Тогда сила упругости оказывается связанной с величиной смещения соотношением $|\vec{F}|=(ax+b)x=$ $=ax^2+bx$, то есть явно нелинейной зависимостью.

Расчет электрических цепей, содержащих нелинейные элементы, чаще всего производится графическим способом. Разберем в качестве примера такую простую задачу. На рисунке 2 приведена схема нелинейной системы, содержащей диод и лампу накаливания, вольтамперные характеристики которых заданы на рисунке 3. Цепь подключена к источнику постоянного напряжения $U=2$В. Какова сила тока в цепи?

Поскольку лампа и диод соединены последовательно, при данном значении тока в цепи падение напряжения на ее концах равно сумме падений напряжений на диоде и на лампе. Воспользовавшись этим, построим вольтамперную характеристику всей цепи (черная линия на рисунке 3). Теперь легко найти, что при $U=2$ В сила тока равна 0,13 А.

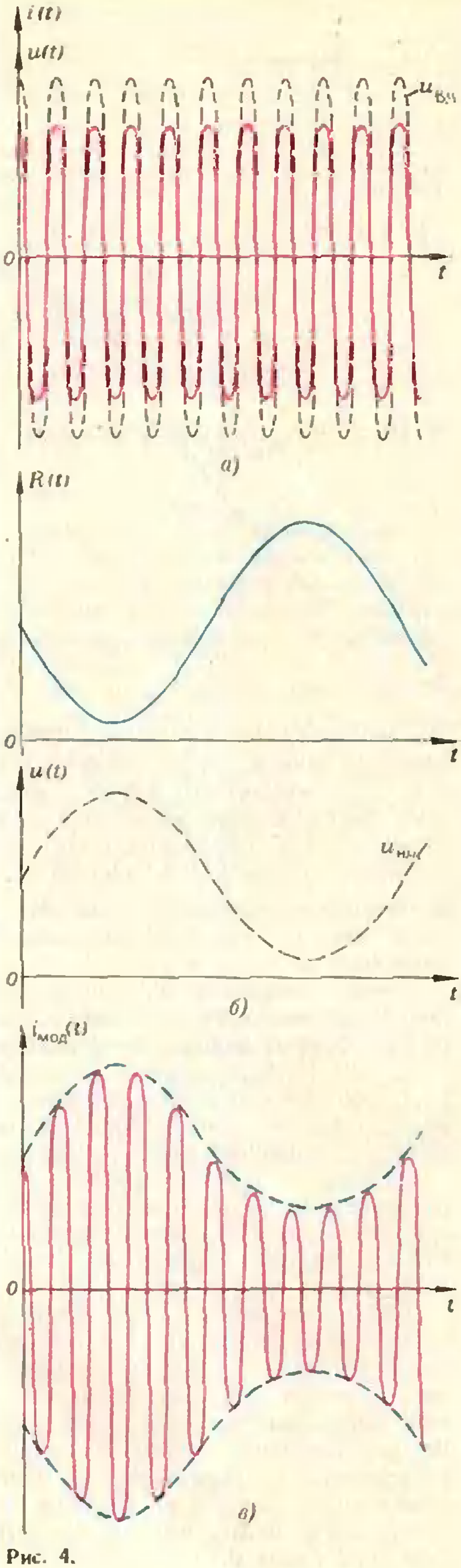


Рис. 4.

Нелинейные электрические и магнитные системы находят широкое применение в технике. Генераторы незатухающих колебаний, модуляторы и детекторы колебаний, преобразователи частоты и т. п. — устройства, принципиально осуществимые только на нелинейных элементах.

Поясним, например, необходимость нелинейных элементов для осуществления амплитудной модуляции колебаний. Как известно, при амплитудной модуляции амплитуда высокочастотных колебаний должна изменяться в соответствии с изменением величины напряжения полезного сигнала, например, сигнала звуковой частоты. Независимо от конкретной схемы, деталей, из которых она состоит, модулятор можно представить как некий нелинейный резистор — резистор, сопротивление которого зависит от напряжения управляющего (полезного) сигнала: с уменьшением этого напряжения сопротивление нарастает. Если резистор подключен к источнику переменного напряжения высокой (несущей) частоты, то колебания тока в резисторе повторяют колебания «сигнала» от источника (рис. 4, *а*). Если теперь на резистор подавать дополнительно переменное напряжение низкой частоты (полезный сигнал), то сопротивление резистора начинает «колебаться» с той же низкой частотой (рис. 4, *б*), и в результате этого амплитуда колебаний тока в резисторе будет увеличиваться при уменьшении сопротивления и уменьшаться при его увеличении. Иными словами, амплитуда колебаний несущей частоты будет в свою очередь «колебаться», следуя изменению величины полезного сигнала (рис. 4, *в*).

Ясно, что линейный резистор не обеспечил бы модуляции высокочастотных колебаний: в том режиме, который мы описали, результирующие колебания тока в резисторе представляли бы собой суперпозицию высоко- частотных и низкочастотных колебаний, и амплитуда высокочастотных колебаний оставалась бы неизменной (рис. 5).

В Задачнике «Кванта» в этом номере журнала помещена задача Ф546. Схема, которая приведена в этой за-

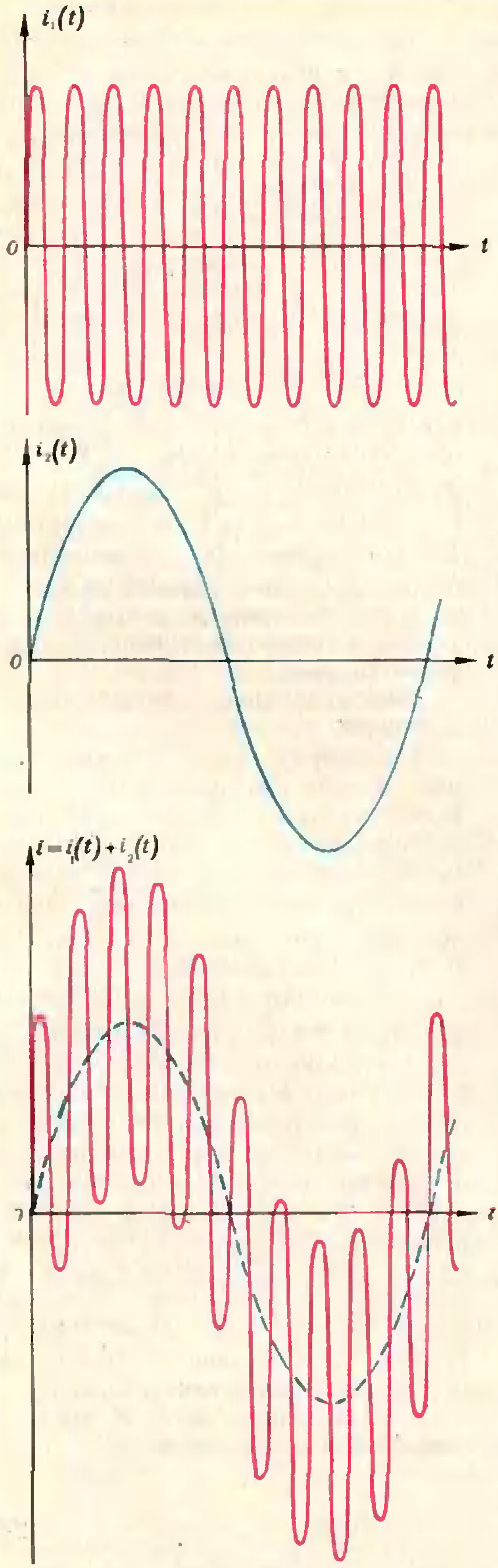


Рис. 5.

даче, — это принципиальная схема устройства магнитного усилителя. Магнитные усилители — еще один пример применения нелинейных элементов в технике. Задача Ф546 довольно трудная. Мы облегчим читателю ее решение следующей подсказкой: в магнитных усилителях «работает» нелинейная зависимость индуктивности катушки с ферромагнитным сердечником от тока.

В заключение следует отметить, что, строго говоря, все физические системы являются нелинейными, если пределы изменения их состояний *не ограничены. Это мы видели в механических* системах — при больших деформациях, в электромагнитных — при больших токах (напряжениях). Однако нередко даже в области малых изменений состояния системы ее приходится рассматривать как нелинейную. Так, сила сухого трения изменяется скачком при изменении знака скорости, сила тока в проводниках с односторонней проводимостью изменяется нелинейно при изменении знака напряжения.

Упражнения

1. На горизонтальной плоскости находится ящик массой $m=10$ кг. Максимальная сила трения покоя $|\vec{f}|=35$ Н. На ящик могут действовать две взаимно перпендикулярные силы $|\vec{F}_1|=30$ Н и $|\vec{F}_2|=40$ Н, лежащие в горизонтальной плоскости. Опишите движение ящика в случаях, когда на него действуют: а) только сила $\vec{F}_1$; б) только сила $\vec{F}_2$; в) обе силы одновременно.

2. Лампа и диод, вольтамперные характеристики которых приведены на рисунке 3, соединены параллельно. Ток в неразветвленной части цепи $I=0,15$ А. Определите графически токи в лампе $I_л$ и в диоде $I_д$.

3. Резистор с сопротивлением 6 Ом и нелинейное сопротивление, вольтамперная характеристика которого описывается зависимостью $U=2\sqrt{I}$, соединены последовательно и подключены к источнику напряжения $U=4$ В. Рассчитайте без построения графиков силу тока в цепи.

А. Геронимус

Сравнения по простому модулю

В статье «Сравнения и классы вычетов» *) было рассмотрено множество F_m классов вычетов по модулю m и были определены три операции — сложения, вычитания и умножения классов. Там было доказано, что в случае, когда модуль сравнения — простое число, можно определить и деление на любой ненулевой класс. Благодаря этому сравнения по простому модулю обладают рядом интересных и тонких свойств, которыми сравнения по произвольному модулю не обладают. Мы познакомимся здесь с некоторыми такими свойствами. В дальнейшем мы будем все время считать, что модуль — простое число; чтобы не забывать об этом, мы будем обозначать его через p.

Существование первообразного корня

Назовем *порядком* класса вычетов $\bar{a} \in F_p$ наименьшее натуральное число k, для которого $\bar{a}^k = \bar{1}$. В конце статьи «Сравнения и классы вычетов» было сказано, что в множестве F_p существует класс, порядок которого равен $p-1$. Класс с таким свойством называется *первообразным корнем*. Теорема о существовании такого класса была впервые доказана Лежандром (1752—1833). Приведем доказательство теоремы Лежандра, близкое к доказательству самого Лежандра.

*) См. «Квант» № 10.

Докажем сначала, что если порядки l и m двух классов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно просты, то порядок произведения $\bar{a}\bar{b}$ равен lm. Действительно, $(\bar{a}\bar{b})^{lm} = \bar{a}^{lm} \cdot \bar{b}^{lm} = (\bar{a}^l)^m \cdot (\bar{b}^m)^l = \bar{1}$ (так как $\bar{a}^l = \bar{1}$ и $\bar{b}^m = \bar{1}$). Порядок класса $\bar{a}\bar{b}$ должен быть поэтому делителем числа lm. Обозначим его через $l'm'$, где l' — делитель l, а m' — делитель m (l и m взаимно просты!) *). Итак,

$$\bar{a}^{l'm'} \cdot \bar{b}^{l'm'} = (\bar{a}\bar{b})^{l'm'} = \bar{1}.$$

Возведем обе части этого равенства в такую степень l'', что $l'l'' = l$. Получим тогда $(\bar{a}^l)^{m'} \cdot \bar{b}^{lm'} = \bar{1}$, а так как l — порядок $\bar{a}$, то $(\bar{a}^l)^{m'} = \bar{1}$ и потому $\bar{b}^{lm'} = \bar{1}$. Значит, lm' делится на m (порядок $\bar{b}$), но l взаимно просто с m, а m' — делитель m, поэтому $m' = m$, аналогично $l' = l$; наше утверждение доказано.

Перейдем теперь непосредственно к теореме.

Рассмотрим класс $\bar{a}$ с наибольшим возможным порядком N. Мы хотим доказать, что это и есть первообразный корень. Для этого достаточно убедиться, что любой другой класс $\bar{b}$ является степенью $\bar{a}$. Предположим, что порядок $\bar{b}$ равен n. Возможны два случая.

1) N делится на n. Рассмотрим n классов $\bar{a}^{k\ N/n}$ при $0 \leqslant k < n$. Все они являются различными корнями степени n из единицы, т. е. решениями уравнения $\bar{x}^n - \bar{1} = \bar{0}$ (проверьте). Класс $\bar{b}$ также является корнем степени n из единицы по определению порядка. В приложении к этой статье мы докажем, что у любого многочлена степени n с коэффициентами из F_p и, в частности, у многочлена $\bar{x}^n - \bar{1}$ не может быть больше, чем n корней. Поэтому $\bar{b}$ есть один из элементов $\bar{a}^{kN/n}$, то есть является степенью $\bar{a}$.

2) N не делится на n. Пусть r — наибольший общий делитель N и n.

*) Возможность такого представления произвольного числа lm следует из Основной теоремы арифметики, доказанной в приложении к этой статье.

Порядок класса $\overline{ab^r}$ равен n/r (проверьте). Числа N и n/r взаимно просты. Поэтому порядок класса $\overline{ab^r}$ равен $N \cdot n/r > N$. Это противоречит максимальности N. Второй случай невозможен.

Теорема о существовании первообразного корня доказана.

Гипотеза Артина

Приведенное доказательство не конструктивно: мы не можем указать явно, какой именно из вычетов $\overline{1}$, ..., $\overline{p-1}$ является первообразным корнем по модулю p.

Американский математик Э. Артин (1898—1962) высказал такую гипотезу: если целое число n не является полным квадратом, то существует бесконечно много простых чисел p, для которых класс вычетов по mod p, содержащий n, является первообразным корнем по mod p. Эта гипотеза до сих пор не доказана. Если бы мы могли явно указать первообразные корни по mod p для всех p, было бы легко выяснить, верна ли эта гипотеза. (Проверьте, что если $n=m^2$ для какого-нибудь m, то простых чисел >2, о которых говорится в гипотезе, вовсе не существует.)

Извлечение корней

Теорема Лежандра позволяет выяснить, когда в множестве F_p можно извлечь корни.

Корнем степени n из класса вычетов $\overline{b}$ естественно назвать такой класс $\overline{x}$, что $\overline{x}^n = \overline{b}$.

Пусть $\overline{a}$ — какой-нибудь первообразный корень в F_p. Существует такое натуральное число k, что $\overline{b} = \overline{a}^k$. Если в соотношении $\overline{x}^n = \overline{b}$ заменить $\overline{x}$ на $\overline{a}^y$, то его можно переписать в виде $\overline{a}^{yn} = \overline{a}^k$ или $\overline{a}^{yn-k} = \overline{1}$.

Из последнего соотношения видно, что $yn-k$ делится на $p-1$.

Эта делимость равносильна следующему равенству в множестве F_{p-1}: $\overline{yn} = \overline{k}$.

Обратно, если $\overline{m}$ в множестве F_{p-1} является решением уравнения $\overline{yn}=\overline{k}$, то $\overline{a}^m$ является корнем степени n из $\overline{b}$ (в F_p).

Таким образом, задачу об извлечении корней в множестве F_p мы свели к задаче о делении в множестве F_{p-1}.

В статье «Сравнения и классы вычетов» было указано, что если d — наибольший общий делитель чисел n и $p-1$ и k делится на d, то у уравнения $\overline{yn} = \overline{k}$ имеется ровно d решений; если же — не делится, то у уравнения $\overline{yn} = \overline{k}$ вовсе нет решений.

Теперь вопрос о корнях степени n из класса вычетов $\overline{b}$ выяснен полностью:

Теорема. *Если индекс*) k класса $\overline{b} \in F_p$ делится на наибольший общий делитель d чисел n и $p-1$, то существуют d различных корней степени n из класса $\overline{b}$, в противном случае из класса $\overline{b}$ нельзя извлечь корня степени n.*

Пример: $p = 11$.

Выпишем все степени класса $\overline{2}$ в множестве F_{11}. В таблице 1 в первой строчке выписан показатель степени k, а во второй — $\overline{2}^k$ **). Видно, что

Таблица 1

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{2}^k \in F_{11}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$

получаются все 10 ненулевых классов по mod 11. Значит, $\overline{2}$ — первообразный корень, а числа в первой строчке — индексы (по основанию $\overline{2}$) классов во второй строчке.

Изучим вопрос об извлечении кубического корня. В этом случае $d=1$; значит, у каждого класса должен быть один кубический корень. Возь-

*) Напомним (см. «Квант» № 10, с. 8), что индексом класса $\overline{b}$ по основанию $\overline{a}$ (где $\overline{a}$ — первообразный корень) называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить $\overline{b}$. В формулировке теоремы не существенно, какой первообразный корень выбран.

**) Проще всего вычислять степени двойки (или другого элемента) последовательно: $\overline{2}^k = \overline{2} \cdot \overline{2}^{k-1}$; сначала же возводить 2 в степень k, а потом приводить по mod 11 — дело более трудоемкое.

мем, например, класс $\bar{3}$. Его индекс равен $\bar{8}$. Нам нужно решить уравнение $\bar{3}y=\bar{8}$ в множестве F_{10}. Будем умножать все классы в F_{10} на $\bar{3}$ (табл. 2). Из таблицы видно, что ответ — $\bar{6}$, значит, в множестве F_{11} $\bar{2}^6=\bar{9}$ — кубический корень из $\bar{3}$. Действительно, $\bar{9}^3=\bar{3}$.

Таблица 2

$\bar{k} \in F_{10}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\bar{0}$
$\bar{3}\bar{k} \in F_{10}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{9}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{8}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{7}$	$\bar{0}$

Пусть теперь $n=5$, тогда $d=5$ и из всех классов, кроме классов $\bar{1}$ и $\overline{10}$ (с индексами 10 и 5), корень степени 5 не извлекается. Найдем сначала корни степени 5 из $\bar{1}$. Легко сообразить, что это все классы с четными индексами. (Действительно, класс с четным индексом $2r$ равен $\bar{2}^{2r}$; $(\bar{2}^{2r})^5=(\bar{2}^r)^{10}=\bar{1}$ в силу малой теоремы Ферма для $p=11$.) Таких классов ровно половина, пять штук — это $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$ и $\bar{9}$. По теореме в множестве F_{11} и должно быть пять корней степени 5 из $\bar{1}$.

Займемся теперь корнями степени 5 из $\overline{10}$. Один такой корень виден из таблицы — это $\bar{2}$, действительно, $\bar{2}^5=\overline{10}$. Чтобы получить все корни, нужно умножить $\bar{2}$ на все корни степени 5 из $\bar{1}$, которые мы уже нашли. Действительно, если $\bar{x}^5=\bar{1}$, то $(\bar{2}\bar{x})^5=\bar{2}^5\cdot\bar{x}^5=\overline{10}\cdot\bar{1}=\overline{10}$. Ответ: классы $\bar{2}$, $\bar{6}$, $\bar{7}$, $\bar{8}$, $\overline{10}$, то есть все классы с нечетными индексами. То, что $\overline{10}$ — корень степени 5 из самого себя, не удивительно — ведь $\overline{10}=-\bar{1}$.

Квадратичные вычеты и невычеты

Рассмотрим теперь частный случай — извлечение квадратных корней. Прежде всего нужно рассмотреть наибольший общий делитель d чисел 2 и $p-1$. Если $p=2$, то $d=1$; если $p>2$, то p нечетно, значит, $p-1$ четно и $d=2$. Рассмотрим случай нечетного p (случай $p=2$ вы легко исследуете сами). Мы выяснили, что из класса с четным индексом можно извлечь квадратный корень (причем их будет два для каждого класса), а из класса с нечетным индексом нельзя извлечь квадратного корня. Классы с четными индексами называются *квадратичными вычетами*, а с нечетными индексами — *квадратичными невычетами*. Так как среди всевозможных значений индекса от 1 до $p-1$ имеется $\frac{p-1}{2}$ четных чисел и $\frac{p-1}{2}$ нечетных чисел, то среди $p-1$ ненулевых классов квадратичных вычетов и квадратичных невычетов поровну. Интересно еще, что произведение вычета на вычет или невычета на невычет дает квадратичный вычет, а произведение квадратичного вычета на невычет дает невычет. Это следует из того, что при перемножении классов их индексы складываются. Аналогичные утверждения справедливы и для частного. Например, частное от деления невычета на невычет — обязательно квадратичный вычет.

Обратимся снова к $p=11$. Квадратичные вычеты — это элементы с четными индексами, то есть всевозможные корни степени 5 из $\bar{1}$, а квадратичные невычеты — это элементы с нечетными индексами, то есть все корни степени 5 из $-\bar{1}$. Такая скрытая симметрия имеет место для всех p, а не только для 11*).

Рациональные и иррациональные классы вычетов

Итак, не из всех классов можно извлечь корень. Например, квадратный корень, как мы убедились, можно извлечь только из половины ненулевых классов.

Такое явление имеет место и для обычных чисел. Вам хорошо известно, что в области рациональных чисел из числа 2, например, нельзя извлечь квадратного корня. Вы знае-

*) О квадратичных вычетах и невычетах можно прочесть в «Кванте» № 1 за 1973 год (с. 2—9).

те также, что если расширить множество рациональных чисел и рассмотреть множество **R** всех вещественных чисел, то в этом большем множестве из числа 2 можно извлечь квадратный корень, и $\sqrt{2}$ является числом из множества **R**, только — иррациональным.

Давайте поступим аналогичным образом и с классами вычетов. Для наглядности рассмотрим опять $p=11$. Мы видели, что класс $\overline{2}$ — квадратичный невычет, из него не извлекается квадратный корень. Построим большее множество $G\supset F_{11}$, в котором будет существовать квадратный корень из класса $\overline{2}$, то есть такой элемент α, что $\alpha^2=\overline{2}$.

Так же, как и при геометрических построениях, проведем анализ. Прежде всего уточним постановку задачи. Чтобы равенство $\alpha^2=\overline{2}$ имело смысл, естественно считать, что для любой пары элементов множества G определено их произведение. Потребуем также, чтобы была определена и сумма любых двух элементов в множестве G. В таком случае в G должны содержаться всевозможные двучлены $\overline{a}+\overline{b}\alpha$, где $\overline{a}$, $\overline{b}\in F_{11}$. Оказывается, этого уже вполне достаточно. Мы можем обычным образом определить сумму двучленов: $(\overline{a}+\overline{b}\alpha)+(\overline{c}+\overline{d}\alpha)=(\overline{a}+\overline{c})+(\overline{b}+\overline{d})\alpha$. Например, $(\overline{5}+\overline{2}\alpha)+\overline{9}\alpha=\overline{5}$.

При умножении возникают члены с α^2. Мы будем заменять α^2 на $\overline{2}$. Например, $(\overline{3}+\overline{7}\alpha)(\overline{5}+\overline{2}\alpha)=\overline{3}\cdot\overline{5}+(\overline{7}\cdot\overline{5}+\overline{2}\cdot\overline{3})\alpha+\overline{2}\cdot\overline{7}\alpha^2=\overline{10}+\overline{8}\alpha$.

В множестве G столько элементов $\overline{a}+\overline{b}\alpha$, сколько существует пар $\overline{a}$, $\overline{b}\in F_{11}$, то есть $11^2(=121)$. Поэтому для него принято обозначение F_{11^2}. Не нужно путать это множество с множеством F_{121} классов вычетов по модулю 121, в котором тоже 121 элемент. В отличие от F_{121}, в F_{11^2} существует частное от деления $\overline{a}+\overline{b}\alpha$ на $\overline{c}+\overline{d}\alpha$, если только $\overline{c}$ и $\overline{d}$ не равны одновременно нулю. Это утверждение доказывается в два этапа. Сначала рассмотрим случай, когда $\overline{d}=0$. Легко проверить, что $(\overline{a}+\overline{b}\alpha):c=\overline{a}/\overline{c}+(\overline{b}/\overline{c})\alpha$. Общий случай сводится к этому, если умножить делимое и делитель на $\overline{c}-\overline{d}\alpha$. Тогда придется делить на $\overline{c}^2-\overline{2}\overline{d}^2$. Этот элемент множества F_{11} отличен от нуля, иначе бы мы имели $\overline{c}^2=\overline{2}\overline{d}^2$, $\overline{2}=\left(\dfrac{\overline{c}}{\overline{d}}\right)^2$, и $\overline{2}$ оказалось бы квадратичным вычетом в F_{11}. Поэтому деление возможно.

В множестве F_{11^2} извлекаются квадратные корни не только из $\overline{2}$, но и из всех классов $\overline{r}\in F_{11}$. Действительно, если $\overline{r}$ — квадратичный вычет, квадратный корень извлекается уже в F_{11}. Если же $\overline{r}$ — невычет, то, как мы видели раньше, частное от деления $\overline{r}$ на $\overline{2}$ является квадратичным вычетом и поэтому существует такой класс $\overline{s}$, что $\overline{r}=\overline{2}\overline{s}^2$. В таком случае $\sqrt{\overline{r}}=\sqrt{\overline{2}\cdot\overline{s}^2}=\overline{s}\alpha$.

Аналогичным образом можно построить F_{p^2} для произвольного p. В связи с извлечением корней более высоких степеней возникают множества F_{p^3}, F_{p^4} и т. д. В множестве F_{p^2} есть первообразный корень, то есть элемент максимального возможного порядка p^2-1. Интересно, что это утверждение мы фактически уже доказали: при доказательстве теоремы Лежандра мы использовали только существование четырех действий и конечность изучаемого множества.

Задачи

1. Найти все первообразные корни в множестве F_{13}.
2. Уравнение $\overline{x}^2+\overline{y}^2=\overline{0}$ имеет решение в множестве F_p $(p>2)$, отличное от $\overline{x}=\overline{y}=\overline{0}$, в том и только в том случае, когда остаток от деления p на 4 равен 1.
3. Сколько решений у уравнения $\overline{x}^2-\overline{5}\overline{x}+\overline{7}=\overline{0}$ в множестве F_5? а в F_7?
4. Сколько элементов являются кубами в F_{13}, F_5, F_{11}, в F_p? k-ми степенями?
5. Сколько первообразных корней в множестве F_p?
6. Сколько элементов в множестве F_{11^2} являются квадратами?

Приложение

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число $n>2$ может быть представлено в виде произведения простых множителей; с точностью до порядка множителей такое представление единственно.

А. Сначала методом математической индукции докажем существование представления. Для $n=2, 3, 4$ это очевидно. Рассмотрим теперь число n и предположим, что все числа, меньшие n, могут быть разложены в произведение простых. Если n — простое число, то $n=n$ — искомое представление. Если n — составное число, то $n=n_1n_2$, причем $n_1, n_2<n$. Применив предположение индукции к числам n_1 и n_2, получим соответствующее представление и для числа n.

В. Единственность представления доказывается сложнее. Вот одно из возможных доказательств. Применим снова метод индукции.

Для $n=2, 3, 4$ единственность имеет место. Предположим, что она имеет место для всех чисел, меньших n. Предположим далее, что число n представляется в виде произведения простых двумя способами:

$$n = p_1p_2 \ldots p_k = q_1q_2 \ldots q_m.$$

При этом равенство $p_i=q_j$ невозможно, иначе, сократив на $p_i=q_j$ обе части равенства, мы получили бы неединственность представления для меньшего числа $l=n/p_i=n/q_j$.

Предположим, что в обоих разложениях множители записаны в порядке возрастания ($p_i \geqslant p_{i-1}$ и $q_i \geqslant q_{i-1}$) и, кроме того, $p_1<q_1$.

Рассмотрим число $m = p_1q_2 \ldots q_m$. Из $p_1<q_1$ следует $m<n$. Число $n-m$ делится на p_1, поэтому $n-m=p_1t_1 \ldots t_s$, где t_i — простые числа. С другой стороны, $n-m=(q_1-p_1)q_2 \ldots q_m=r_1 \ldots r_s q_2 \ldots q_m$ (где $r_1 \ldots r_s=q_1-p_1$ — разложение числа q_1-p_1 на простые множители). Сравним эти два разложения числа $n-m$ на простые множители. $p_1 \neq r_i$, так как q_1-p_1 не делится на p_1 (иначе бы q_1 делилось на p_1). Кроме того, $p_1 \neq q_j$. Таким образом, мы получили два разных разложения числа $n-m<n$ в произведение простых множителей. Это противоречит предположению индукции.

Корни многочлена

Докажем, что у многочлена степени n с коэффициентами из F_p не может быть больше n попарно различных корней.

Для многочленов степени один наше утверждение верно. Воспользуемся индукцией. Предположим, что для многочленов степени меньшей n, утверждение верно.

Пусть у многочлена $P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ по крайней мере n попарно различных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим многочлен $Q_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$. Ясно, что у многочлена $R=P_n-Q_n$ степень не больше $n-1$, причем $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — его корни. Поэтому R должен тождественно равняться нулю. Следовательно, $P_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, и корней, отличающихся от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, у него нет.

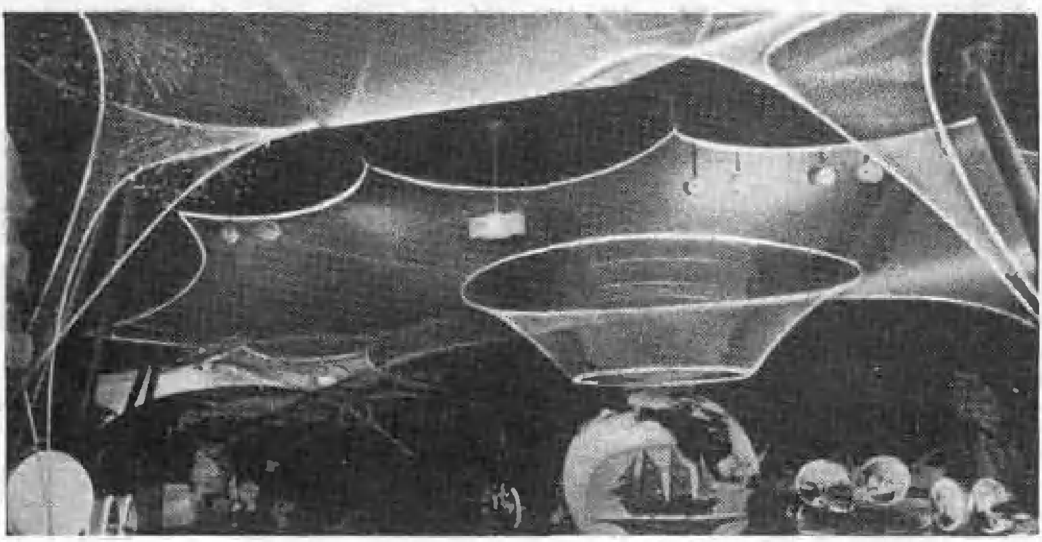
Строительство и ... мыльные пленки

В настоящее время большое внимание уделяется разработке и внедрению в практику строительства легких конструкций. Оказывается, один из методов моделирования таких конструкций связан с ... мыльными пленками.

Как известно, именно мыльные пленки очень часто образуют поверхности самой причудливой формы и при этом с наименьшей площадью. Вот почему моделирование на мыльных пленках широко используется на первой стадии проектирования конструкций сложных форм.

На фотографии вы видите фрагмент декоративной композиции, которая экспонировалась в павильоне Советского Союза на Всемирной выставке 1975 года. Композицию отличают оригинальность формы, легкость, вызывающая у зрителя ощущение невесомости, эфемерности.

В. Колейчук



П. Канаев

Простые опыты с мыльными пленками и пузырями

Для опытов не требуется никакого сложного оборудования, поэтому их можно выполнять даже в домашних условиях.

Необходимые условия успешного проведения опытов — тщательная промывка используемой стеклянной посуды и приготовление хорошего мыльного раствора. Лучше всего раствор готовить из разведенного в воде шампуня с добавлением небольшого количества чистого глицерина и крепкого нашатырного спирта.

В качестве узкой трубочки для выдувания мыльных пузырей можно использовать пустой пластмассовый стержень от шариковой авторучки со снятым металлическим наконечником. Пузыри лучше выдувать небольших размеров и следить, чтобы на дне их не было капелек раствора. Если понадобится пузырь оторвать от конца трубки, это легко сделать быстрым движением руки вертикально вверх.

После того, как вы приготовите все необходимое и потренируетесь в выдувании мыльных пузырей, приступайте к конкретным опытам.

1. Выдуйте мыльный пузырь, оторвите его от конца трубки и сразу же начните быстро двигаться назад — сначала прямо, затем отклоняясь то вправо, то влево. Пузырь будет все время следовать за вами!

Такое поведение пузыря связано с тем, что при резком движении человека между ним и пузырем создается область пониженного давления воздуха — сюда и устремляется мыльный пузырь.

2. Возьмите широкую стеклянную трубку (диаметром не меньше 2 см). Вырежьте из фольги круг диаметром чуть больше диаметра трубки. Смочив фольгу мыльным раствором, приложите ее к торцу трубки; другим концом трубку опускайте в глубокий сосуд с водой. Вскоре вы увидите, что «клапан» из фольги приоткрывается — это «работает» образовавшийся на торце трубки мыльный пузырь, раздувающийся под действием сжатого воздуха в трубке. Чем глубже погружается трубка в воду, тем на больший угол открывается «клапан». При некоторой глубине погружения этот угол становится равным 90° (рис. 1).

3. Осторожно опустите мыльный пузырь на какую-нибудь плоскую смачиваемую поверхность (например, на воду, бумагу или стекло) — благодаря смачиванию нижняя часть пузыря растечется по поверхности, и пузырь примет форму полушара.

Теперь на проволочном кольце получите плоскую мыльную пленку и положите на нее мыльный пузырь, диаметр которого приблизительно равен диаметру кольца. Вы увидите, что и пузырь, и плоская пленка изменили свою форму — получилась двояковыпуклая линза, обе половинки которой симметричны относительно плоскости проволочного кольца.

4. Возьмите оправу очков без стекол и опустите ее в мыльный раствор — оправа затянется двумя

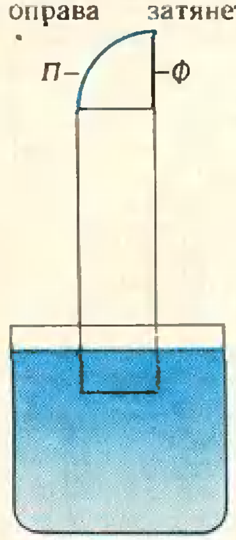


Рис. 1.

плоскими пленками. Если надеть такие очки, то окружающие предметы будут видны в естественном виде: не будет ни увеличения, ни уменьшения, ни ослабления видимости.

Видоизмените опыт. Снова затяните оправу пленками и, расположив их в горизонтальной плоскости, на каждую из них опустите по мыльному пузырю (как в предыдущем опыте). Вы получите очки с двояковыпуклыми мыльными линзами. Но вот что удивительно: через такие необыкновенные очки окружающие предметы просматриваются без всяких изменений, как и в случае с плоскими пленками. Почему?

Дело в том, что мыльные линзы, по существу, — воздушные, так как между тончайшими сферическими мыльными пленками находится воздух. Световые лучи, проходящие через такую линзу, практически не преломляются.

5. Можете ли вы получить плоскую мыльную пленку в пробирке, причем именно не на свободном конце, а внутри пробирки? Попробуйте это сделать. Предлагаем вам два способа.

а) Частично заполните пробирку водой. Возьмите полоску бумаги и, смочив ее мыльным раствором, проведите ею по торцу пробирки — торец затянется пленкой. Чтобы пленка вошла внутрь пробирки, наклоните пробирку и сквозь пленку вылейте часть воды. Сколько выльется воды по высоте, настолько и опустится пленка.

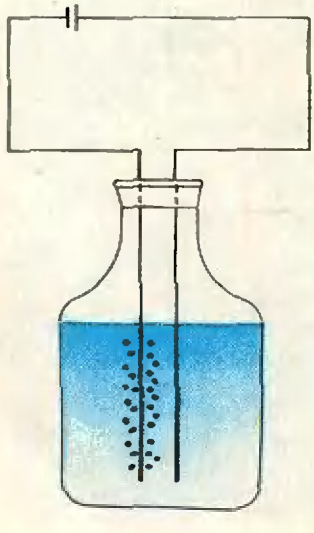


Рис. 2.

б) В пробирку налейте немного воды и нагрейте ее до кипения с помощью свечи или спиртовки. Отодвинув нагреватель, затяните отверстие мыльной пленкой. Через некоторое время вы увидите, что пленка будет постепенно опускаться вовнутрь пробирки.

Объясняется это тем, что водяные пары при охлаждении конденсируются, под пленкой создается разряжение, куда и устремляется пленка. Для ускорения процесса опускания пробирку можно охлаждать проточной водой.

6. Выдуйте на конце узкой трубочки мыльный пузырь. С помощью пластилина прикрепите свободный конец трубочки к лапке штатива или к какой-либо горизонтальной поперечине, расположенной на высоте примерно 20 см над поверхностью стола. С помощью медицинского шприца (или другой узкой трубочки) можно накачивать воздух в пузырь или выкачивать его. Будут ли происходить искажения формы пузыря?

Конечно, нет — это непосредственно следует из закона Паскаля.

7. Возьмите стеклянную баночку высотой 60 мм и наполните ее на $^2/_3$ мыльным раствором. Закройте баночку пробкой, куда вставлены два электрода из медной проволоки диаметром 1—2 мм и длиной 80 мм (рис. 2). Нижние концы электродов должны доходить до дна, но не соприкасаться с ним. Верхние концы согните под углом 90° и с помощью подводящих проводов подключите электроды к батарейке для карманного фонаря. На катоде начнут выделяться небольшие пузырьки газа, которые, поднимаясь вверх, образуют на поверхности раствора пену. Какой газ заключен в пузырьках? Будут ли выделяться пузырьки, если вместо мыльного раствора в баночку налить спирт, глицерин, керосин?

Чтобы ответить на эти вопросы, достаточно вспомнить, что при замыкании электрической цепи происходит электролиз воды, так что на катоде выделяется водород. А в спирте, глицерине и керосине пузырьки вообще не возникнут, поскольку продукты электролиза совсем другие.

Л. Курляндчик

Высокие степени

В этой статье мы будем сравнивать между собой числа. Постоянным будет вопрос: какое из чисел больше? Кое-кто из вас может подумать: «Что тут спрашивать! Всем ясно, что десять больше пяти, а сто меньше тысячи». Ну что же, прочитав эту заметку, вы, вероятно, согласитесь, что ответ на этот вопрос бывает очень и очень непростым.

Начнем с такой задачи.

З а д а ч а 1. *Какое число больше:* $2^{3^{100}}$ *или* $3^{2^{100}}$?

Р е ш е н и е. Докажем, что $2^{3^{100}} > 3^{2^{100}}$. Действительно, $2^{3^{100}} = 4^{\frac{3^{100}}{2}}$. Поэтому достаточно доказать, что $\frac{3^{100}}{2} > 2^{100}$ или что $(^3/_2)^{100} > 2$. Но уже $(^3/_2)^2 > 2$, так что $(^3/_2)^{100}$ и подавно больше 2. Из нашего решения видно, что $2^{3^x} > 3^{2^x}$. Из этого факта (его нетрудно проверить и непосредственно) легко вывести другое решение задачи.

Следующая задача чуть-чуть сложнее.

З а д а ч а 2. *Какое число больше:* $5^{10}+6^{10}$ *или* 7^{10}?

П е р в о е р е ш е н и е. Докажем, что $5^{10}+6^{10}<7^{10}$. Так как $5^{10}+6^{10}<2\cdot 6^{10}$, то достаточно доказать, что $(^7/_6)^{10}>2$. Последнее неравенство следует из неравенства Бернулли («Алгебра и начала анализа 9», п. 2):

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{10} = \left(1+\frac{1}{6}\right)^{10} > 1+10\cdot\frac{1}{6} > 2.$$

В т о р о е р е ш е н и е. Заметим, что $5^3+6^3=341<343=7^3$.

Поэтому $\left(\frac{5}{7}\right)^3+\left(\frac{6}{7}\right)^3<1$. Так как $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}<\left(\frac{5}{7}\right)^3$ и $\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<\left(\frac{6}{7}\right)^3$, получаем $\left(\frac{5}{7}\right)^{10}+\left(\frac{6}{7}\right)^{10}<1$. Значит, $5^{10}+6^{10}<7^{10}$.

З а д а ч а 3. *Какое из десяти чисел* 1^{10}, 2^9, 3^8, 4^7, 5^6, 6^5, 7^4, 8^3, 9^2, 10^1 *самое большое?*

Р е ш е н и е. Очевидно, что $2^9>1^{10}$. Докажем, что 3^8 больше 2^9. Действительно, $3^8=9^4>8^4=2^{12}>2^9$. Теперь сравним 4^7 и 3^8: $4^7>3^8 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^7>3$. Осталось заметить, что $\left(\frac{4}{3}\right)^7=\left(1+\frac{1}{3}\right)^7>1+7\cdot\frac{1}{3}>3$.

Итак, из первых четырех чисел самое большое 4^7.

Докажем теперь, что $4^7>5^6>6^5>7^4>8^3>9^2>10^1$. Из $4^7>5^6 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^6<4$ и $\left(\frac{5}{4}\right)^6=\left(\frac{125}{64}\right)^2<2^2=4$ следует $4^7>5^6$.

Неравенства $5^6>6^5$ и $6^5>7^4$ доказываются аналогично.

Неравенства $7^4>8^3>9^2>10^1$ очевидны.

Таким образом, самое большое среди наших чисел — это 4^7. В конце статьи мы еще раз вернемся к этой задаче и приведем менее «выкладочное» решение.

З а д а ч а 4. *Какое число больше:*

$1^n+2^n+3^n+\ldots+9^n$ *или* 10^n?

Р е ш е н и е. Легко видеть, что при маленьких n $1^n+2^n+\ldots+9^n$ больше, чем 10^n. Действительно,

$$1+2+\ldots+9>10; \qquad 1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2>10^2;$$

$$1^3+2^3+\ldots+9^3>9^3+8^3=729+512>1000=10^3.$$

Прежде чем рассматривать другие значения n, заметим, что если при некотором n $1^n+2^n+\ldots+9^n<10^n$, то для всех $m>n$ тем более $1^m+2^m+\ldots+9^m<10^m$. Действительно, при переходе к бо́льшим значениям показателей правая часть увеличивается в бо́льшее число раз, чем левая.

Докажем теперь, что $1^7+2^7+\ldots+9^7<10^7$.

Заметим, что $1^7+2^7<3^7$. Поэтому $1^7+2^7+3^7<2\cdot3^7<4^7$ (последнее неравенство можно обосновать при помощи неравенства Бернулли). Тогда $1^7+2^7+3^7+4^7<2\cdot4^7<5^7$ и так далее вплоть до $1^7+2^7+\ldots+8^7<2\cdot8^7$. Оказывается, верно также $2\cdot8^7<9^7$ и $2\cdot9^7<10^7$, но неравенство Бернулли здесь бессильно. Чтобы доказать эти неравенства, достаточно проверить, что $\left(\frac{9}{10}\right)^7<\frac{1}{2}$, а это мы предлагаем сделать непосредственным подсчетом.

Итак, при $n\geqslant 7$

$$1^n+2^n+\ldots+9^n<10^n.$$

Оказывается, $1^5+2^5+3^5+\ldots+9^5>10^5$, поскольку $0{,}9^5+0{,}8^5+0{,}7^5>1$ (проверьте), а тогда и $1^4+2^4+\ldots+9^4>10^4$.

Чтобы завершить решение задачи, осталось выяснить, что больше: $1^6+2^6+\ldots+9^6$ или 10^6. Предлагаем вам сделать это самостоятельно.

(Ответ. $10^6>1^6+2^6+\ldots+9^6$.) Итак, $1^n+2^n+\ldots+9^n>10^n$ при $1\leqslant n\leqslant 5$; при $n\geqslant 6$ — «наоборот».

В следующей задаче появляются очень высокие степени.

Задача 5. *Какое число больше:*

$$1^1+2^2+3^3+\cdots+1000^{1000} \text{ или } 2^{2^{2^2}}?$$

Решение. Во-первых, $2^{2^{2^{2^2}}}=2^{2^{2^4}}=2^{2^{16}}$. Так как $2^{10}=1024>10^3$ и $2^6=64$, получаем $2^{16}>64000$.

Значит, $2^{2^{2^{2^2}}}>2^{64\,000}$. С другой стороны, $1^1+2^2+3^2+\cdots+1000^{1000}<\underline{<1000^{1000}+1000^{1000}+\cdots+1000^{1000}}=$
1000

$$=1000^{1001}<(2^{10})^{1001}=2^{10\,010}.$$

Так как $2^{64\,000}>2^{10\,010}$, получаем

$$2^{2^{2^{2^2}}}>1^1+2^2+3^3+\cdots+1000^{1000}.$$

Как мы видим, $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}\right\}n$ с ростом n очень быстро растет. Но и число $\underbrace{22\ldots2}_{n}{}^{\overbrace{22\ldots2}^{n}}$ также растет очень быстро. Какое же из этих чисел больше?

Задача 6. *Что больше:* $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}\right\}n$ *или* $\underbrace{22\ldots2}_{n}{}^{\overbrace{22\ldots2}^{n}}$?

Решение. Давайте для удобства обозначим

$$\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^2}}}}\right\}n \text{ через } a_n,$$

$$\text{а } \underbrace{22\ldots2}_{n}{}^{\overbrace{22\ldots2}^{n}} \text{ через } b_n.$$

Легко вычислить несколько первых значений a_n: $a_1=2$, $a_2=4$, $a_3=16$, $a_4=65\,536$. $b_1=4$, однако уже b_2 вручную подсчитать очень тяжело. Тем не менее проверить, что $a_1<b_1$, $a_2<b_2$, $a_3<b_3$, $a_4<b_4$, совсем просто (сделайте это самостоятельно).

Сравним a_5 и b_5.

$$a_5=2^{a_4}=2^{65\,536};\quad b_5=22\,222^{22\,222}.$$

Докажем, что $b_5>a_5$. Действительно, $22\,222>1024=2^{10}$, поэтому $22\,222^{22\,222}>(2^{10})^{22\,222}=2^{222\,220}>2^{65\,536}$. Итак, при $1\leqslant n\leqslant 5$ имеем $a_n<b_n$. Давайте теперь сравним a_6 и b_6:

$$a_6=2^{a_5}=2^{2^{65\,536}};\quad b_6=222\,222^{222\,222}.$$

$2^{65\,536}$ — очень большое число: $2^{65\,536}>10^{3\cdot6553}=10^{19\,659}$. Поэтому $a_6>2^{10^{19\,659}}=(2^{10^2})^{10^{19\,657}}>(10^{30})^{10^{19\,657}}$ и намного больше b_6. Попробуем теперь доказать, что $a_n>b_n$ при $n\geqslant 6$. Оценим b_n сверху. Так как $\underbrace{22\ldots2}_{n}<10^n$, $b_n<(10^n)^{10^n}=10^{n\cdot10^n}$. В свою очередь, $10^{n\cdot10^n}<(2^4)^{n\cdot(2^4)^n}=2^{4n\cdot2^{4n}}<2^{2^n\cdot2^{4n}}=2^{2^{5n}}$. Таким образом, $b_n<2^{2^{5n}}$. Поэтому достаточно доказать, что $a_{n-2}>5n$ при $n\geqslant 6$. Для $n=6$ это так: $a_4=2^{16}>5\cdot6$. Следовательно, $a_5=2^{a_4}>2a_4>2\cdot5\cdot6>5\cdot7$; $a_6=2^{a_5}>2a_5>2\cdot5\cdot7>5\cdot8$ и так далее.

Задача решена полностью.

Сейчас мы решим задачу М486 из Задачника «Кванта».

Задача 7. *Какое число больше:*

$$2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\Big\}n \text{ или } 3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\Big\}n?$$

Эту задачу можно решить многими способами. Приведем один из них.

Решение. Для удобства обозначим $2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\Big\}n$ через a_n, а $3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\Big\}n$ через b_n. Заметим, что $a_{n+1}=2^{b_n}$; $b_{n+1}=3^{a_n}$.

Легко видеть, что $a_1=2$, $b_1=3$. Значит, $b_1>a_1$. Далее $a_2=2^3=8$, $b_2=3^2=9$. Поэтому $b_2>a_2$. Посчитаем a_3 и b_3. $a_3=2^{b_2}=512$; $b_3=3^{a_2}=6561$. Таким образом, $b_3>a_3$. Заметим, что $b_3>3a_3$. Выведем из этого, что $a_4>3b_4$. Действительно, $3b_4=3\cdot 3^{a_3}<2^{a_3}\cdot 4^{a_3}=2^{3a_3}<2^{b_3}=a_4$. Теперь легко понять, что и в общем случае из условия $3a_n<b_n$ следует, что $3b_{n+1}<a_{n+1}$, а из условия $3b_n<a_n$ — что $3a_{n+1}<b_{n+1}$.

Действительно, пусть $3a_n<b_n$. Тогда

$$3b_{n+1}=3\cdot 3^{a_n}<2^{a_n}\cdot 4^{a_n}=2^{3a_n}<2^{b_n}=a_{n+1}.$$

Если же $3b_n<a_n$, то $3a_{n+1}=3\cdot 2^{b_n}<3^{b_n}\cdot 3^{b_n}=3^{2b_n}<3^{a_n}=b_{n+1}$. Таким образом, мы получаем, что $b_n>a_n$ при нечетных n и $n=2$ и $a_n>b_n$ при четных $n\geqslant 4$.

Все предыдущие решения были основаны на счастливых догадках. Более скучный, но зато более универсальный подход — использование логарифмов. Проиллюстрируем его на примере.

Задача 8. ***Найти степень четверки, наиболее близкую к числу***

$$2^{100}+3^{100}.$$

Решение. Во-первых, давайте попробуем оценить, во сколько раз число 3^{100} больше, чем 2^{100}. Для этого рассмотрим отношение этих чисел:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{100}=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{50}>2^{50}=(2^{10})^5>(10^3)^5=10^{15}.$$

Значит, 2^{100} составляет менее, чем 0,000000000000001 от 3^{100}!

Теперь нам ясно, что число $2^{100}+3^{100}$ «практически» равно 3^{100}. Значит, $4^k\approx 3^{100}$, где k — искомая степень. Поэтому $k\approx 100\dfrac{\lg 3}{\lg 4}$. По таблице логарифмов находим, что $\lg 3\approx 0{,}4771$, $\lg 4\approx 0{,}6021$. Отсюда получаем, что $k\approx 79$.

Наши рассуждения нельзя считать достаточными для доказательства. Пока они позволили нам найти ответ лишь приблизительно.

Приведем теперь строгое доказательство того, что 4^{79} — искомая степень.

Мы знаем, что значения логарифмов, приведенные в таблице В. М. Брадиса, имеют погрешности, не превосходящие половины единицы разряда последней цифры. (См. В. М. Брадис «Четырехзначные математические таблицы», с. 3.)

Поэтому $0{,}47705<\lg 3<0{,}47715$; $0{,}60205<\lg 4<0{,}60215$. Отсюда непосредственно умножая и округляя в нужную сторону, получаем $47{,}5<79\lg 4<47{,}6$ и $48{,}1<80\lg 4<48{,}2$. $\lg(2^{100}+3^{100})$ оценим следующим образом:

$$\lg(2^{100}+3^{100})=100\lg 3+\lg\left(1+(2/3)^{100}\right).$$

Из $\lg\left(1+(2/3)^{100}\right)<\lg(1+10^{-15})<\lg(1+10^{-2})<0{,}005$ (последнее неравенство при помощи таблиц) выводим $47{,}7<\lg(2^{100}+3^{100})<47{,}8$. Таким образом, $\lg(2^{100}+3^{100})-79\lg 4<0{,}3$, $80\lg 4-\lg(2^{100}+3^{100})>0{,}3$ и 4^{79} ближе к $2^{100}+3^{100}$, чем 4^{80}.

Иногда для сравнения больших чисел удается, рассмотрев подходящую функцию, использовать методы дифференциального исчисления. Подробный рассказ об этом не входит в наши намерения. Мы снова ограничимся одним примером.

В задаче 3 требовалось отыскать среди чисел k^{11-k} $(k=1, 2, 3, \ldots, 10)$ максимальное.

Давайте рассмотрим функцию $f(x)=x^{11-x}$ $(x\in\,]0;\infty[)$.

Посчитаем производную этой функции. Для этого x^{11-x} преобразуем так: $x^{11-x}=e^{(11-x)\ln x}$. Значит,

$$f'(x)=\left(e^{(11-x)\ln x}\right)'=e^{(11-x)\ln x}\times\left[(11-x)\ln x\right]'=x^{11-x}\left[\frac{11-x}{x}-\ln x\right].$$

Ясно, что знак $f'(x)$ совпадает со знаком выражения, стоящего в скобке.

Функция $g(x)=\frac{11}{x}-\ln x-1$ на $]0;+\infty[$ убывает, причем $g(4)=1{,}75-\ln 4>0$, $g(5)=1{,}2-\ln 5<0$. (Докажите эти неравенства, воспользовавшись тем, что $3>e>2{,}5$.) Поэтому существует такое $x_0\in]4;5[$, что на промежутке $]0;x_0]$ функция f возрастает, а на $[x_0;\infty[$ — убывает. Значит, среди наших чисел самое большое либо $f(4)$, либо $f(5)$. Остается выбрать большее из них.

Задачи

9. Какое число больше:
а) 15^{30} или 30^{15}?
б) 2^{40} или 3^{33}?
в) 10^{1000} или 9^{1111}?

10. Какое число больше:
а) $5^{16}+6^{20}+7^{26}$ или 8^{24}?
б) $7^{15}+15^{7}$ или $6^{16}+16^{6}$?
в) $5^{5^{5^{5}}}$ или $6^{6^{6^{6}}}$?

11. Расположить в порядке возрастания числа
а) 2^{100}, 100^{50}, $3^{3^{3^{3}}}$, 1978^{1978}.
б) $\underbrace{111\ldots1}_{1978}{}^{\underbrace{11\ldots1}_{1978}}$, $10^{10^{10^{10}}}$, $5^{5^{5^{5}}}$, $2^{3^{4^{5^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{10}}}}}}}$

12. Какое число больше:
а) $\left.\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}^{\frac{1}{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n$ или $\left.\frac{1}{3}^{\frac{1}{2}^{\frac{1}{3}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}\right\}n$?
б) $\left.2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}n+2$ или $\left.3^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}\right\}n$?

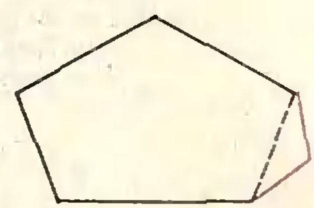
Новый калейдоскоп

Наш читатель Б. Ивякин прислал в редакцию следующую задачу: *разрезать правильный шестиугольник на 9 одинаковых частей.*

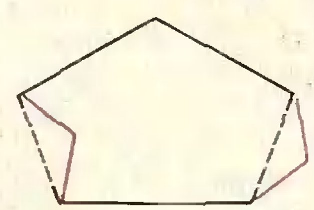
К задаче был приложен ответ, он изображен в центре первой страницы обложки нашего журнала: отрезками, соединяющими центр с вершинами, шестиугольник разбит на три ромба, каждый из которых разделен на три параллелограмма.

Когда я познакомился с этой задачей, то, естественно, начал искать другие решения. Довольно долго мне не удавалось нужным образом разбить шестиугольник, но, наконец, я нашел такое разбиение (оно изображено в верхней части рисунка на обложке). После этого мне захотелось «пошевелить» полученные пятиугольники. Результат оказался очень неожиданным — требуемые разбиения шестиугольника посыпались, как из рога изобилия. Пять из них изображены на обложке журнала.

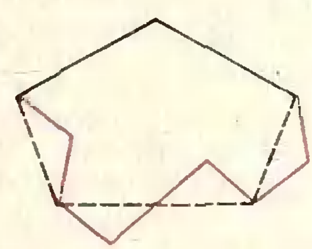
Попробуем понять, что же происходит при таком «шевелении». Рассмотрим один из пятиугольников, примыкающих к границе данного шестиугольника, и немного изменим его правую боковую сторону (рис. 1а). Если мы таким образом изменим правые боковые стороны у всех пятиугольников, примыкающих к границе шестиугольника, то автоматически изменятся и их левые боковых стороны (рис. 1б). Если теперь проделать такое же изменение боковых сторон у трех центральных пятиугольников, то оно повлечет изменение формы «основания» у трех внешних пятиугольников (рис. 1в). Если теперь точно таким же образом изменить основания у остальных трех внешних пятиугольников, то при этом точно такую же форму примут и «основания» внутренних пятиугольников. В результате все девять частей вновь станут совершенно одинаковыми, и мы получаем новое разбиение шестиугольника на девять конгруэнтных частей. Форма такого разбиения может оказаться весьма причудливой, как это можно видеть из рисунка на обложке журнала. Многоугольники одного из разбиений очень похожи на зайчиков.



а)



б)



в)

Попробуйте сами поэкспериментировать с такими разбиениями. Если у вас получатся интересные картинки, то присылайте нам. Лучшие картинки мы опубликуем.

А. Савин

Центр тяжести полушария

22 века назад Архимед придумал механический метод, с помощью которого впервые удалось найти объем шара и центр тяжести полушария. Еще раньше Демокрит и Евдокс установили, что объем конуса в три раза меньше объема описанного цилиндра, а центр тяжести конуса делит его высоту в отношении *3:1, считая от вершины*.

Докажем, что объем шара в полтора раза меньше объема описанного цилиндра и что центр тяжести полушария делит его высоту в отношении 3:5, считая от центра шара.

Рассмотрим шар и описанный около него цилиндр. Плоскость рисунка 1 проходит через ось цилиндра, направленную горизонтально. *Рассмотрим также конус* с вершиной в центре шара O и основанием, общим с основанием полуцилиндра.

Проведем через произвольную точку A на оси полуцилиндра плоскость MN, перпендикулярную этой оси. В сечении с шаром она даст круг радиуса AP, с конусом — круг радиуса AB, с цилиндром — круг радиуса $AM=R$. Теорема Пифагора гласит, что $AP^2+AO^2=OP^2=AM^2$, а так как угол при вершине конуса прямой и $AO=AB$, $AP^2+AB^2=AM^2$.

Взяв это соотношение π раз, усматриваем, что сечения шара и конуса в сумме имеют площадь, равную сечению цилиндра:

$$S_ш + S_к = S_ц. \qquad (1)$$

Так как (1) верно для любой точки A на оси полуцилиндра, из принципа Кавальери («Алгебра и начала анализа 10», п. 107, или «Квант», 1977, № 2, с. 7, 10) находим, что объемы полушария $V_ш$ и конуса $V_к$ в сумме равны объему полуцилиндра $V_ц$:

$$V_ш + V_к = V_ц. \qquad (2)$$

Рассмотрим теперь ось цилиндра *как рычаг* с серединой в центре O. Перенесем сечение цилиндра в правую сторону рисунка в точку A', симметричную точке A относительно центра O. *С помощью (2)* устанавливаем, что сечения шара и конуса, подвешенные вместе в точке A, уравновешивают сечение цилиндра, подвешенное в точке A'.

Если теперь заполнить кругами все сечения шара и конуса слева, а сечения полуцилиндра — симметрично справа от точки O, то из равновесия каждых трех таких кругов следует, что полушарие и конус вместе *уравновешивают* полуцилиндр относительно центра O (рис. 2).

Но центр тяжести полуцилиндра находится на середине C его оси, и центр тяжести K конуса, как было упомянуто выше, на расстоянии $OK = (3/4)\ R$ от вершины. Пусть центр тяжести полушария будет в точке X. Тогда по правилу рычага условие равновесия этих трех тел имеет вид:

$$|OX| \cdot V_ш + |OK| \cdot V_к = |OC| \cdot V_ц. \qquad (3)$$

Но $V_к = (1/3)\ V_ц$, а из соотношения между объемами (2) находим $V_ш = V_ц - V_к = (2/3)\ V_ц$, то есть объем полушария в полтора раза меньше объема описанного полуцилиндра. Поэтому условие равновесия (3) принимает вид:

$$(2/3)V_ц\,|OX| + (1/3)V_ц \times (3/4)R = V_ц \cdot (1/2)R.$$

Отсюда получаем

$$|OX| = (3/8)\ R,$$

то есть центр тяжести полушария делит высоту полушария в отношении 3:5, считая от центра шара.

Как этим методом найти центр тяжести сегмента *шара или сегмента эллипсоида*, легко сообразит и сам читатель.

М. Мамикон

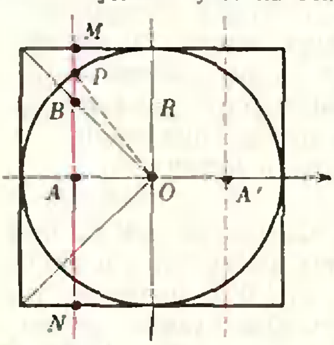


Рис. 1.

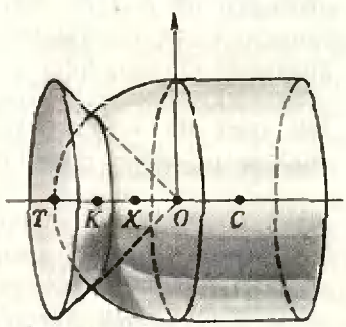


Рис. 2.

От редакции: В № 5 журнала «Квант» за 1977 г. было опубликовано два решения задачи об объеме шара — «механическое» решение Архимеда и геометрическое решение М. Мамикона. Данная заметка является логическим продолжением этой статьи.

Задачник Кванта

Задачи
M531—M535; Ф543—Ф547

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.
Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 января 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса напишите на конверте номера задач, решения которых вы посылаете (например, «М531, М534» или «Ф543»). Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Решения задач из разных номеров журнала также присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые.

М531. Из пунктов A и B не одновременно выехали навстречу друг другу автомобилист и велосипедист. Встретившись в точке C, они тотчас развернулись и поехали обратно (с теми же скоростями). Доехав до своих пунктов A и B, они опять развернулись и второй раз встретились в точке D; здесь они вновь развернулись, и т. д. В какой точке отрезка AB произошла их 1978-я встреча?

Н. Васильев

М532. Положим $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ и $b_n=\sqrt{4n+2}$. Докажите, что для любого натурального n

а) $[a_n]=[b_n]$, где $[x]$ — целая часть числа x;

б) $0<b_n-a_n<\dfrac{1}{16n\sqrt{n}}$.

М533*. Назовем выпуклый многоугольник *особым*, если некоторые три его диагонали пересекаются в одной точке. Докажите, что у каждого особого семиугольника найдется вершина A, обладающая таким свойством: для любого $\varepsilon>0$ вершину A можно сдвинуть на расстояние, меньшее ε (не меняя остальных вершин), так, что полученный семиугольник будет неособым.

В. Болтянский

М534. Три прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через одну точку, отсекают от $\triangle ABC$ трапеции. Три диагонали этих трапеций, не имеющие общих концов, делят треугольник на семь частей, из которых четыре — треугольники (рис. 1). Докажите, что сумма площадей трех из этих треугольников, прилежащих к сторонам $\triangle ABC$, равна площади четвертого.

В. Косьянчук

М535. Пусть на плоскости задана система из трех бесконечных в обе стороны последовательностей точек A_k, B_l, C_m (индексы k, l и m пробегают все множество целых чисел). Назовем такую систему *триграммой*, если для любых k и m прямой A_kC_m

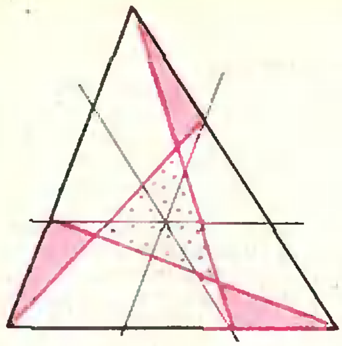


Рис. 1.

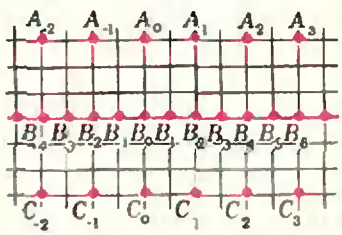


Рис. 2.

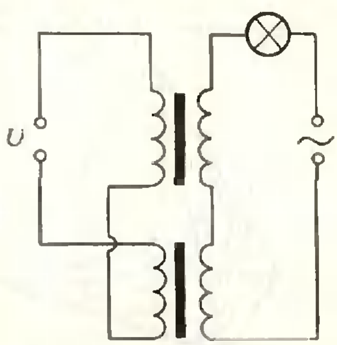


Рис. 3.

принадлежит еще одна точка B_{k+m} этой системы.

а) Проверьте, что система, изображенная на рисунке 2, *является триграммой.*

б) Докажите, что для любых трех различных прямых a, b и c существует триграмма, для которой $A_k \in a$, $B_l \in b$, $C_m \in c$ (при всех k, l, m).

в) Докажите, что если все точки A_k и C_m триграммы лежат, соответственно, на прямых a и c, то все точки последовательности B_l также лежат на одной прямой.

Задачи б) и в) советуем сначала решить для случая, когда прямые a и c параллельны.

г) Придумайте ограниченную триграмму (*все точки которой лежат в пределах* некоторого круга).

В. Батырев

Ф543. На плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра падают под углом 45° световые лучи, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси полуцилиндра. Из какой части боковой поверхности полуцилиндра будут выходить лучи света? Показатель преломления стекла n.

II Международная олимпиада по физике, 1968 г.

Ф544. Оценить скорость ракеты с космонавтом при выходе из плотных слоев атмосферы.

Ф545. Два воздушных пузырька радиусов $r_1 = r_2 = 3$ мм в баке с водой сливаются в один. Найти радиус получившегося пузырька сразу же после его образования и через большое время после этого, если теплопроводность воды невелика, а ее теплоемкость очень большая. Считать, что пузырьки находятся вблизи поверхности воды.

Журнал «KLM» (Венгрия)

Ф546. Первичные обмотки двух одинаковых трансформаторов соединяются последовательно друг с другом и с лампочкой, рассчитанной на напряжение сети 220 В (рис. 3). Затем их подключают к источнику переменного тока с напряжением 220 В. При этом оказывается, что лампочка не горит. Если же затем вторичные обмотки трансформаторов (содержащие большое число витков) соединить так, как показано на рисунке 3, и подключить их к источнику постоянного тока, то при увеличении напряжения источника от 0 до 30 В лампочка будет гореть тем ярче, чем больше напряжение источника. Объяснить описанный опыт.

Е. Бланк

Ф547. Фотографии шаровых сгустков светящейся плазмы, летящих равнозамедленно до остановки, имеют вид полос длины l. Максимальная ширина полос $d \ll l$. Расстояние между плазмой и объективом фотоаппарата L, фокусное расстояние объектива F. Минимальное время «засветки», необходимое для того, чтобы на фотографии появилось изображение, равно τ. Определить ускорение сгустков. Объектив фотоаппарата остается открытым до полной остановки сгустков.

В. Сергиенко

Решения задач

М482, М485, М487, М489—М490; Ф498—Ф501

М482. *Сечение правильного тетраэдра — четырехугольник. Докажите, что периметр этого четырехугольника не меньше 2a, но меньше 3a, где a — длина ребра тетраэдра.*

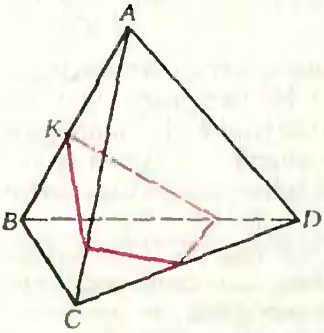


Рис. 1.

Докажем сначала, что периметр четырехугольника $p \geqslant 2a$. Развертка тетраэдра (рис. 2) изображена на рисунке 2. При развертке контур четырехугольного сечения превратится в красную ломаную K_1K_2. Видно, что периметр p будет равен $2a$ лишь тогда, когда секущая плоскость параллельна двум скрещивающимся ребрам тетраэдра, а во всех остальных случаях $p > 2a$.

Доказательство неравенства $p < 3a$ легче всего получить, рассматривая сразу с е м е й с т в о сечений тетраэдра параллельными плоскостями. Пусть плоскость сечения перемещается параллельно самой себе; мы рассматриваем такой интервал значений $l \in [b_1; b_2]$ (см. рис. 2), что при $b_1 < l < b_2$ сечение остается четырехугольником, а при $l = b_1$ и $l = b_2$ оно становится треугольником (рис. 3). Длина каждой стороны сечения, а значит и периметр p сечения, будет линейной функцией от l: $p(l) = kl + c$ (k, c — некоторые постоянные). Наибольшее значение такая функция принимает на концах отрезка $[b_1; b_2]$, когда сечение — треугольник. Но длина любого отрезка с концами на сторонах равностороннего треугольника не больше длины его стороны a, и поэтому $p < 3a$.

Н. Васильев, В. Произволов

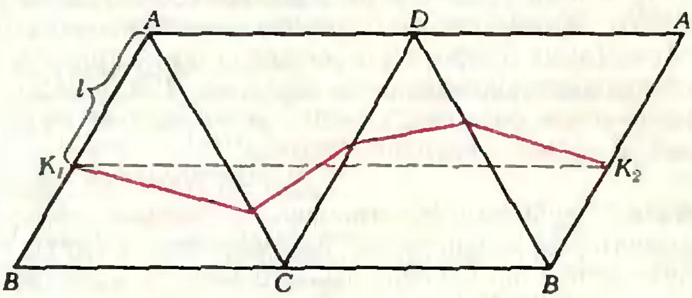


Рис. 2.

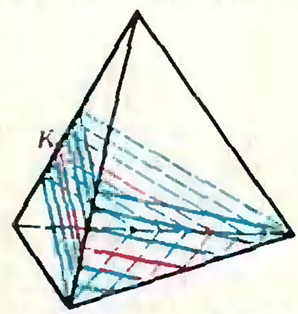


Рис. 3.

М485. *а) Докажите, что число e заключено между числами $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ и $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ при любом натуральном n.*

б) Докажите, что последовательность $c_n = \left(1+\frac{1}{4n}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает, а последовательность $d_n = \left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонно убывает.

в) Разделим отрезок $[a_n; b_n]$ на четыре равных по длине отрезка. В каком из них лежит число e?

а) Докажем, что последовательность (a_n) монотонно возрастает. Действительно,

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n : \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n}{n-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Согласно неравенству Бернулли *),

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n},$$

откуда

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} > 1.$$

Докажем теперь, что последовательность (b_n) монотонно

*) Докажите его самостоятельно. См. также «Алгебра и начала анализа 9», п. 2.

г) Разделим отрезок $[a_n; b_n]$ на восемь равных частей. В какой из них лежит e?

д) А если отрезок $[a_n; b_n]$ разделить на 2^k равных частей (в этой задаче интересно получить ответ для достаточно больших n, например, для $n>2^k$)? (Напомним, что $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2{,}718\ldots$, — см. учебник «Алгебра и начала анализа 10», пп. 109, 113.)

убывает. Имеем

$$\frac{b_{n-1}}{b_n}=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n:\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=$$

$$=\frac{n-1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}.$$

Вновь применяя неравенство Бернулли, получим

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1}>1+\frac{1}{n-1}=\frac{n}{n-1},$$

то есть $\frac{b_{n-1}}{b_n}>1$.

Поскольку $e=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, из доказанного следует, что

$$a_n<e<b_n.$$

д) Решим задачу д) — задачи б), в) и г) будут следовать из этого решения.

Разделим отрезок $[a_n; b_n]$ на 2^k равных частей. Длина одной такой части равна

$$\Delta=\frac{b_n-a_n}{2^k}=\frac{1}{2^k\cdot n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Середине отрезка $[a_n; b_n]$ соответствует число $a_n+\frac{b_n-a_n}{2}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=d_n$. Легко видеть, что 2^{k-1}-й из полученных отрезочков имеет правым концом число d_n, а левым концом — число $t_n=d_n-\Delta=$

$$=\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\frac{1}{2^k\cdot n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$

$=\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{2^k\cdot n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(k\geqslant 2)$. (При $k=2$ число t_n совпадает с числом c_n из пункта б) задачи.)

Докажем, что при достаточно больших n (а именно, при $n>3\cdot 2^{k-2}$) число e лежит на 2^{k-1}-м отрезочке длины Δ. Для этого достаточно показать, что при таких n последовательность левых концов (t_n) этого отрезочка монотонно возрастает, а последовательность (d_n) правых концов монотонно убывает (поскольку $e=\lim\limits_{n\to\infty}t_n=\lim\limits_{n\to\infty}d_n$).

Имеем

$$\frac{d_{n-1}}{d_n}=\left[\left(1+\frac{1}{2(n-1)}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]:$$

$$:\left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\frac{2n-1}{2n+1}\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n.$$

Аналогично неравенству Бернулли, можно доказать более точное неравенство:

$$(1+h)^n\geqslant 1+nh+\frac{(n-1)n}{2}h^2$$

(здесь n — натуральное, а $h>0$); сделайте это самостоятельно. Из него

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\geqslant 1+\frac{n}{n^2-1}+\frac{n(n-1)}{2(n^2-1)^2}=$$

$$=\frac{2n^3+4n^2+n-2}{2(n-1)(n+1)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{d_{n-1}}{d_n} \geqslant \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n^3+4n^2+n-2}{2(n-1)(n+1)^2} =$$

$$= \frac{4n^4+6n^3-2n^2-5n+2}{4n^4+6n^3-2n^2-6n-2} > 1$$

при любом $n \in N$. Значит, последовательность (d_n) монотонно убывает.

Перейдем теперь к последовательности (t_n). Имеем

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \left[\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{2^k \cdot n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] : \left[\left(1+\frac{2^{k-1}-1}{2^k(n-1)}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right] = \frac{2^k \cdot n+2^{k-1}-1}{2^k\cdot(n-1)+2^{k-1}-1}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Но $(1-h)^n \geqslant 1-nh+\frac{(n-1)^2}{2}h^2$ при $0 < h < \frac{1}{(n-1)^2}$ (это неравенство доказывается аналогично неравенству Бернулли). Поэтому

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} \geqslant \frac{2^k \cdot n+2^{k-1}-1}{2^k\cdot(n-1)+2^{k-1}-1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{(n-1)^2}{2n^4}\right) =$$

$$= \frac{2^k \cdot n+2^{k-1}-1}{2^k\cdot(n-1)+2^{k-1}-1} \cdot \frac{2n^4-2n^3+n^2-2n+1}{2n^4}.$$

Нас интересует, когда $\frac{t_n}{t_{n-1}} > 1$, то есть когда

$$\left(n+\frac{1}{2}-2^{-k}\right)\cdot(2n^4-2n^3+n^2-2n+1) >$$

$$> \left(n-1+\frac{1}{2}-2^{-k}\right)\cdot 2n^4.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству

$$2^{1-k}\cdot n^3-\left(\frac{3}{2}+2^{-k}\right)n^2+2^{1-k}\cdot n+\frac{1}{2}-2^{-k}>0,$$

которое следует из неравенства

$$2^{1-k}\cdot n^3 \geqslant \left(\frac{3}{2}+2^{-k}\right)n^2.$$

Таким образом, при $n \geqslant 3\cdot 2^{k-2}+\frac{1}{2}$, или $n > 3\cdot 2^{k-2}$, последовательность (t_n) становится монотонно возрастающей. Из этого следует наше утверждение: число e лежит внутри 2^{k-1}-го отрезочка длины Δ, если $n > 3\cdot 2^{k-2}$.

Из решения задачи д) следует, что уже $\frac{c_4}{c_1} > 1$. Первые же три члена этой последовательности: $\frac{5}{2}$, $\frac{3^4}{2^5}$, $\frac{13\cdot 2^4}{3^4}$ — очевидно, составляют возрастающую цепочку.

Итак, в задаче в) число e попадает во второй из четырех равных по длине отрезков, а в задаче в) — в четвертый (для $n > 6$).

С. Голубев, Р. Ушаков

◆

М487. *На данных окружностях γ_1 и γ_2 построить по хорде так, чтобы эти хорды были гомотетичны*

Пусть нам удалось построить нужную гомотетию H и пусть $H(\gamma_1)$ пересекается с γ_2 в точках B и C (рис. 4). Проведем в точке A общую к γ_1 и $H(\gamma_1)$ касательную; обозначим через D точку пересечения этой касательной с *с заданным центром A, принадлежащим γ_1, и чтобы длина хорды окружности γ_2 равнялась заданной величине a*).*

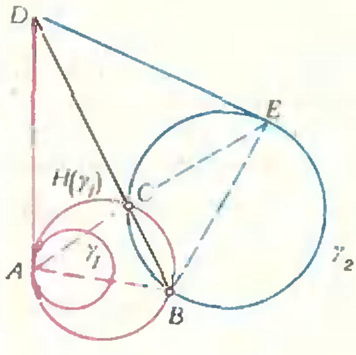


Рис. 4.

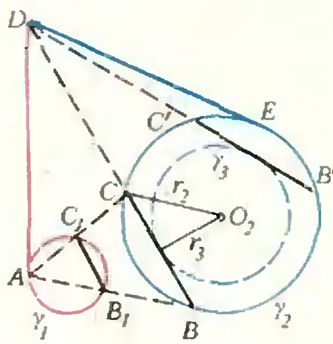


Рис. 5.

(BC). Из точки D проведем касательную DE к окружности γ_2. Легко сообразить, что отрезки AD и DE имеют одинаковую длину. (Действительно, из подобия треугольников ABD и ACD следует, что $|AD|^2 = |DC|\cdot|DB|$, а из подобия треугольников BDE и CDE — что $|DE|^2 = |DC|\cdot|DB|$.) Пусть, наоборот, нам удалось построить такую точку D, что отрезки касательных DA и DE к окружностям γ_1 и γ_2 равны по длине. Пусть O_2 — центр γ_2, а r_2 — ее радиус. Заметим, что все хорды окружности γ_2 длины a касаются концентрической с γ_2 окружности γ_3 радиуса $r_3 = \sqrt{r_2^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ (рис. 5). Проведя из точки D касательные к этой окружности, получим два возможных положения хорды BC окружности γ_2 (длины a). (Если $a = 2r_2$, то хорда — единственная; ее мы получим, соединив D с центром O_2; больше же $2r_2$ длина хорды a, разумеется, быть не может.) Соединив точки B и C с точкой A, получим гомотетичную BC хорду B_1C_1 окружности γ_1 (см. рис. 5, на этом рисунке изображено одно из решений).

Остается построить точку D. Проведем через точку A перпендикуляр m к прямой l, касающейся в точке A окружности γ_1.

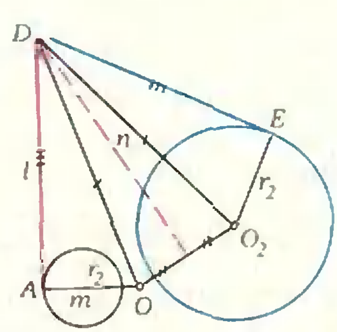


Рис. 6.

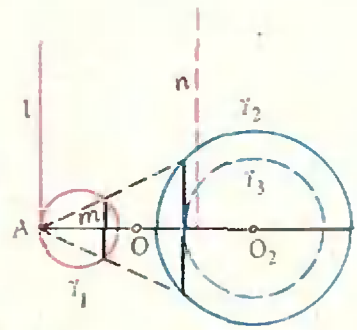


Рис. 7.

Отложим на m отрезок AO длины r_2 (рис. 6). Поскольку $|DA| = |DE|$, треугольники ADO и EDO_2 конгруэнтны, так что точка D равноудалена от точек O и O_2. Это дает возможность ее отыскать, если касательная l и серединный перпендикуляр n к отрезку OO_2 пересекаются (как на рисунке 6). Если же l и n параллельны, то в качестве искомой хорды нужно взять отрезок параллельной l *касательной к упомянутой выше окружности* γ_3 (рис. 7).

Л. Лиманов

◆

М489. *Даны три числа a, b, c. Построим три последовательности (a_n), (b_n), (c_n), у которых $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$ и*

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

В качестве наводящего соображения рассмотрим вместо чисел a_1, b_1, c_1 точки A_1, B_1, C_1, о которых сначала *предположим*, что они *не* лежат на одной прямой. Числам a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} сопоставим середины A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} соответствующих сторон треугольника $A_nB_nC_n$. Мы получим три последовательности точек на плоскости. Легко понять, что отрезки медиан треугольника $A_1B_1C_1$, лежащие внутри $\Delta A_2B_2C_2$, являются медианами в $\Delta A_2B_2C_2$. Поэтому точки пересечения медиан обоих треугольников совпадают. Отсюда ясно, что если вместо исходной задачи решать аналогичную задачу для *точек на плоскости*, то соответствующий предел существует и совпадает с точкой пересечения медиан исходного треугольника $A_1B_1C_1$ (и всех последующих треугольников). Эта точка есть *центр тяжести* системы трех исходных точек.

Если исходные точки лежат на одной прямой, то справедливость аналогичного утверждения следует из «соображений непрерывности». *Она вытекает также* из следующего рассуждения. Если A', B', C' — проекции точек A, B, C на координатную ось и a', b', c' — их координаты,

---

*) Решение задачи **М486** см. в статье Л. Курляндчика «Высокие степени» (с. 13); решение задачи **М488** будет опубликовано позже.

для любого $n=1, 2, 3, \ldots$ Докажите, что все эти три последовательности имеют общий предел, и найдите его.

то координата проекции центра тяжести точек A, B, C на эту ось равна среднему арифметическому координат проекций исходных точек, т. е. $\frac{a'+b'+c'}{3}$. (Заметим еще, что координата проекции середины отрезка равна полусумме координат проекций концов отрезка.) Поскольку для любых трех точек a, b, c на прямой можно выбрать три точки на плоскости, проекциями которых служат точки a, b, c, то из справедливости утверждения на плоскости следует его справедливость на прямой.

Теперь легко дать аналитическое доказательство того, что число $d=\frac{a+b+c}{3}$ является общим пределом указанных последовательностей. Для этого, очевидно, достаточно показать, что

$$|a_n-d|=2\,|a_{n+1}-d|,\quad |b_n-d|=2\,|b_{n+1}-d|,\quad |c_n-d|=2\,|c_{n+1}-d|$$

(с каждым шагом последовательности вдвое приближаются к пределу).

Заметим, что для любого n

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2}+\frac{c_n+a_n}{2}+\frac{a_n+b_n}{2}=a_n+b_n+c_n.$$

Отсюда видно, что $d=\frac{a_n+b_n+c_n}{3}$ для любого n. Имеем:

$$|a_n-d|=\left|a_n-\frac{a_n+b_n+c_n}{3}\right|=\left|\frac{2a_n-b_n-c_n}{3}\right|=\left|\frac{b_n+c_n-2a_n}{3}\right|=2\left|\frac{b_n+c_n}{2}-\frac{a_n+b_n+c_n}{3}\right|=2\,|a_{n+1}-d|.$$

Два другие равенства проверяются аналогично.

В заключение заметим следующее. Среднее арифметическое двух чисел, рассматриваемое как операция, неассоциативно (т. е., вообще говоря,

$$\frac{\frac{a+b}{2}+c}{2}\neq\frac{a+\frac{b+c}{2}}{2}\Bigg),$$

и среднее арифметическое трех чисел, вообще говоря, не выражается как конечная комбинация средних арифметических этих чисел, взятых по два (докажите это!). Тем не менее, как мы видели, используя предельный переход, среднее арифметическое трех чисел через среднее арифметическое двоек чисел выразить можно. Аналогичные предельные соотношения связывают средние арифметические $k+1$ и k чисел для любого целого $k\geqslant 2$.

И. Бурмистрович

◆

М490. *p — простое нечетное число. Дано $p-1$ целых чисел, не делящихся на p. Докажите, что, заменив некоторые из этих чисел на противоположные, можно получить $p-1$ чисел, сумма которых делится на p.*

Будем писать $a\equiv b$, если числа a и b дают одинаковые остатки при делении на p (как известно, в этом случае говорят, что *a сравнимо с b по модулю p* — см. статью «Сравнения и классы вычетов» в «Кванте» № 10). Тогда очевидно, что если p — нечетное простое число, то существует такое целое число s, $0\leqslant 2s<p-1$, что $2s\equiv a_1+\ldots+a_{p-1}$ (продумайте это!).

Для доказательства нам понадобится лемма, которая однажды уже публиковалась в «Кванте» («Квант», 1971, № 8, с. 43):

Лемма. *Пусть даны r целых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_r$, не делящихся на p; $0 < r < p$, p — простое. Тогда из этих чисел можно составить по крайней мере $r+1$ сумм, дающих различные остатки при делении на p* (при этом разрешается брать сумму «пустого множества слагаемых», которая считается равной нулю, суммы «из одного слагаемого», из двух, …, из всех r слагаемых).

Доказательство этой леммы мы приведем несколько ниже, а сейчас покажем, как с ее помощью решается наша задача.

В силу леммы из чисел $a_1, \ldots, a_{p-1}$ можно составить по крайней мере p сумм, дающих при делении на p различные остатки. Поскольку всего различных остатков при делении на p ровно p штук: $0, 1, \ldots, p-1$, среди этих сумм найдется сумма, дающая при делении на p остаток s. Пусть эта сумма $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$; тогда $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \equiv s$. Возьмем теперь все остальные числа, не вошедшие слагаемыми в сумму $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k}$; пусть это числа $a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$. Поскольку $a_1 + \ldots + a_{p-1} \equiv 2s$ и $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \equiv s$, получаем, что $a_{j_1} + \cdots + a_{j_l} \equiv s$. Поменяв числа $a_{j_1}, \ldots, a_{j_l}$ на противоположные, получим число $a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} - a_{j_1} - \cdots - a_{j_l}$, сравнимое с нулем по модулю p, то есть делящееся на p.

Для завершения решения задачи нам осталось доказать лемму. Сделаем это по индукции.

При $r = 1$ утверждение леммы очевидно. Предположим, что оно верно для $r = k < p - 1$ и неверно для $r = k + 1$, и придем к противоречию. Итак, пусть суммы из k слагаемых $b_1, b_2, \ldots, b_k$ дают при делении на p $k+1$ различных остатков $0, s_1, \ldots, s_k$. Тогда, поскольку после присоединения b_{k+1} количество р а з л и ч н ы х сумм не должно увеличиваться, все суммы $0 + b_{k+1}$, $s_1 + b_{k+1}, \ldots, s_k + b_{k+1}$ по модулю p содержатся в множестве $\{0, s_1, \ldots, s_k\}$. Другими словами, если к любому элементу этого множества прибавить b_{k+1}, то снова получится элемент того же множества. Таким образом, это множество заведомо содержит элементы 0, b_{k+1}, $2b_{k+1}, \ldots, (p-1)\, b_{k+1}$. Но ясно, что все эти элементы различны (по модулю p): разность $ib_{k+1} - jb_{k+1} = (i-j)\, b_{k+1}$, где $0 < i - j < p$, не может делиться на p, поскольку p — простое. Значит, множество $\{0, s_1, \ldots, s_k\}$ содержит все p различных элементов, хотя мы предполагали, что $k + 1 < p$. Лемма доказана.

Ф. Вайнштейн,
В. Гальперин

◆

Ф498. *Диаметр тонкостенного цилиндрического стакана равен d, высота — h. Стенки и дно стакана одинаковой толщины. В стакан наливают воду. При каком уровне воды центр тяжести стакана с водой занимает наинизшее положение?*

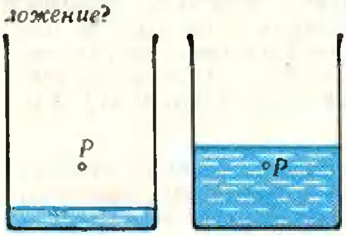


Рис. 8

Наинизшее положение центр тяжести системы занимает тогда, когда он находится на уровне воды в стакане. Действительно, если уровень воды лежит ниже центра тяжести системы (точка P на рисунке 8, *а*), то центр тяжести понижается при доливании в стакан воды (при этом увеличивается масса ниже центра тяжести). Если же уровень воды лежит выше центра тяжести системы (рис. 8, *б*), то центр тяжести опустится, если вылить из стакана воду, лежащую выше него.

Найдем положение центра тяжести системы, когда он находится на минимальной высоте (рис. 9). Если центр тяжести системы (точка P) находится на высоте y над дном стакана, то центр тяжести воды (точка P_1) находится на высоте $y/2$ от дна. Центр тяжести боковых стенок стакана (точка P_2) находится на высоте $h/2$, центр тяжести дна (точка P_3) — на дне. Обозначим через m_1 массу воды в стакане, через m_2 — массу стенок стакана и через m_3 — массу дна. Тогда

$$(m_1 + m_2 + m_3)\, y = m_1 y/2 + m_2 h/2 \qquad (*)$$

(потенциальная энергия $(m_1 + m_2 + m_3)\, gy$ системы рав-

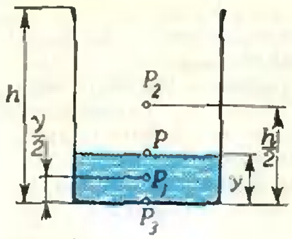


Рис. 9.

на сумме потенциальных энергий воды, стенок стакана и дна: $m_1gy/2 + m_2gh/2 + 0$).

Пусть ρ — плотность воды, μ — масса единицы площади стенок и дна. Тогда $m_1 = \frac{\pi d^2}{4}y\rho$, $m_2 = \pi dh\mu$, $m_3 = \frac{\pi d^2}{4}\mu$.

Используя эти выражения, получим из (*) следующее уравнение для y:

$$y^2d\rho + \mu(8h + 2d)y - 4h^2\mu = 0.$$

Это уравнение имеет только один положительный корень

$$y = \frac{1}{d\rho}\left[\sqrt{\mu^2(4h+d)^2 + 4h^2\mu d\rho} - \mu(4h+d)\right].$$

◆

Ф499. *Два стеклянных шара радиусов r и R соединены тонкой длинной стеклянной трубкой и наполнены воздухом. Посередине трубки находится капля ртути. Можно ли с помощью этого прибора измерять температуру окружающего воздуха?*

Прибор сможет служить термометром, если объемы воздуха V_1 и V_2, разделенные каплей ртути, будут зависеть от температуры.

Рассмотрим сначала, зависит ли V_1 от T (и V_2 от T) при горизонтальном расположении прибора. Если капля ртути находится в равновесии при температуре T, то давления слева и справа от нее должны быть одинаковы: $p_1 = p_2$. Обозначим через m_1 и m_2 массы воздуха, соответственно, слева и справа от капли и через μ — молярную массу воздуха. Тогда

$$p_1 = \frac{m_1}{\mu V_1}RT, \quad p_2 = \frac{m_2}{\mu V_2}RT, \tag{1}$$

так что при $p_1 = p_2$ имеем:

$$\frac{m_1}{V_1} = \frac{m_2}{V_2}, \text{ или } \frac{V_1}{V_2} = \frac{m_1}{m_2}.$$

Мы видим, что при горизонтальном расположении прибора V_1/V_2 не зависит от T. Сумма V_1+V_2 тоже постоянна. Следовательно, ни V_1, ни V_2 не зависят от температуры*). Термометром прибор служить не может.

При вертикальном расположении прибора давление под каплей должно быть выше давления над ней, так чтобы выполнялось условие равновесия:

$$p_1s = p_2s + mg, \tag{2}$$

где m — масса капли, s — площадь сечения трубки, p_1 и p_2 — давления воздуха, соответственно, ниже и выше капли. Подставляя в (2) выражения (1) для p_1 и p_2, получим

$$\frac{m_1}{V_1} - \frac{m_2}{V_2} = \frac{mg\mu}{sRT}.$$

И так как $V_1 + V_2 = \text{const}$, ясно, что в этом случае как V_1, так и V_2 зависят от температуры. Прибор может служить термометром.

◆

Ф500. *На столбе на высоте h над землей висит звонок. На каком расстоянии от столба звук слышен громче всего, если скорость звука равна c, а скорость ветра, дующего горизонтально, равна v?*

Звук, излучаемый звонком, распространяется в виде сферических волн, центр которых движется горизонтально со скоростью ветра $|\vec{v}|$. Так как по мере увеличения радиуса волнового фронта интенсивность звука убывает, ясно, что громче всего звонок слышен в той точке на земле, в которую звук попадает, пройдя минимальное расстояние от центра сферической волны. Это — та точка, в которой сферическая волна касается поверхности земли. Так

---

*) В действительности при изменении температуры меняется объем капли ртути, и это приводит к изменению объемов V_1 и V_2. Однако, поскольку объем капли ртути много меньше V_1 и V_2, этим изменением можно пренебречь.

как к моменту касания волновой фронт проходит расстояние $h = ct$, где t — время, через которое излученная волна коснется поверхности земли, то $t = h/c$. За это время центр волны сместится по направлению ветра на расстояние $l = |\vec{v}|\, t = h\,|\vec{v}|/c$. На таком расстоянии от столба звук и слышен громче всего.

◆

Ф501. *На краю стола высоты H стоит шар радиуса R, причем $R \ll H$. Шар начинает соскальзывать со стола без трения. На каком расстоянии от стола упадет шар?*

До тех пор, пока шар соскальзывает со стола, касаясь его в точке A, центр тяжести шара движется по окружности радиуса R (расстояние между центром и точкой A все время равно R). При этом в каждый момент времени скорость центра тяжести (точки O) направлена перпендикулярно радиусу, проведенному в точку A; центростремительное ускорение точке O сообщают две силы — сила тяжести и сила реакции стола. В тот момент, когда шар отрывается от стола, сила реакции равна нулю. Значит, в этот момент центростремительное ускорение точке O сообщает только сила тяжести.

Пусть в момент отрыва шар касается стола точкой P (рис. 10), скорость точки O в этот момент равна $\vec{v}$. Согласно II закону Ньютона в этот момент (см. рис. 10)

$$\frac{mv^2}{R} = m\,|\vec{g}|\cos\alpha$$

(m — масса шара). Согласно закону сохранения энергии

$$m\,|\vec{g}|\,R = \frac{mv^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2} + m\,|\vec{g}|\,R\cos\alpha.$$

Решая эти уравнения совместно, находим:

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}, \quad |\vec{v}| = \sqrt{\frac{2}{3}\,|\vec{g}|\,R}.$$

Итак, в момент отрыва от стола центр шара движется со скоростью $\vec{v}$, проекция которой на ось X (см. рис. 10) равна $|\vec{v}|\cos\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}\,|\vec{g}|\,R}$, а на ось Y — $|\vec{v}|\sin\alpha = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{10}{3}\,|\vec{g}|\,R}$. В дальнейшем шар движется как тело, брошенное под углом к горизонту с начальной скоростью $\vec{v}$. Координаты x и y центра шара меняются со временем так:

$$x = |\vec{v}|\,t\cos\alpha = \frac{2}{3}\,t\sqrt{\frac{2}{3}\,|\vec{g}|\,R},$$

$$y = |\vec{v}|\,t\sin\alpha + \frac{|\vec{g}|\,t^2}{2} = \frac{\sqrt{5}}{3}\,t\sqrt{\frac{2}{3}\,|\vec{g}|\,R} + \frac{|\vec{g}|\,t^2}{2}$$

(мы считаем, что в начальный момент координата y равна нулю, пренебрегая величиной $h = R\cos\alpha$). В тот момент, когда шар касается земли, $x = x_{max}$, $y = H$. Если это происходит через время t_0 от момента отрыва шара от стола, то

$$H = \frac{\sqrt{5}}{3}\,t_0\sqrt{\frac{2}{3}\,|\vec{g}|\,R} + \frac{|\vec{g}|\,t_0^2}{2},$$

откуда

$$t_0 \approx \frac{1}{3g}\left(3\sqrt{2\,|\vec{g}|\,H} - \sqrt{\frac{10}{3}\,|\vec{g}|\,R}\right).$$

Следовательно,

$$x_{max} = \frac{2}{3}\,t_0\sqrt{\frac{2}{3}\,|\vec{g}|\,R} \approx \frac{4}{3}\sqrt{\frac{RH}{3}} - \frac{4}{27}\,R\sqrt{5}.$$

И. Слободецкий

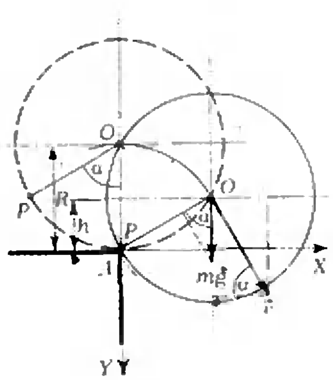


Рис. 10.

А. Звонкин

Что такое π?

Число π впервые появляется в школе в 5 классе — в учебнике «Математика 5» (п. 59), о нем говорится в учебнике «Геометрия 8» (п. 118) и в учебнике «Алгебра и начала анализа 9» (п. 33). Однако доказательства существования числа π в этих учебниках нет. Мы приводим его в этой статье.

Длина отрезка

Длиной отрезка называется р а с с т о я н и е между его концами («Геометрия 6», п. 7).

На практике длины отрезков измеряют с помощью измерительных приборов — линейки, рулетки и т. п. Теоретический анализ этого процесса приводит к математической конструкции, называемой *процессом измерения*, и вполне заслуживает отдельной статьи.

Коротко говоря, процесс измерения состоит в следующем:

1) выбирается произвольный отрезок — *единица длины*;

2) единица длины откладывается в и з м е р я е м о м о т р е з к е столько раз, сколько можно;

3) если при этом от измеряемого отрезка остается о с т а т о к, то единица длины делится на равные части и полученная часть единицы откладывается в остатке;

4) и так далее.

Самое интересное здесь скрыто в четвертом пункте. Оказывается, процесс измерения может кончиться за конечное число шагов (в этом случае измеряемый отрезок и единица длины называются *соизмеримыми*), а может и п р о д о л ж а т ь с я б е с к о н е ч н о.

Таким образом, даже при измерении длины отрезка может понадобиться п р е д е л ь н ы й п е р е х о д. Вполне естественно, что он будет необходим нам и при определении длины о к р у ж н о с т и. При этом мы будем считать, что мы уже знаем, что такое длина отрезка и, тем самым, п е р и м е т р м н о г о у г о л ь н и к а.

Читатель может спросить: а нельзя ли измерить длину окружности следующим простым способом — обмотать ее ниткой, затем нитку развернуть и приложить к линейке? К сожалению, для превращения этого практического способа измерения в строгую математическую конструкцию требуются довольно изысканные математические средства, выходящие за рамки школьной программы.

Плохие определения длины окружности

Теорема может быть верной или неверной — о п р е д е л е н и е ни верным, ни неверным быть не может. Определение может быть п р о т и в о р е ч и в ы м (если не существует объектов, удовлетворяющих ему), н е к о р р е к т н ы м (если оно определяет не то, что мы хотели) и н е у д о б н ы м.

Мы дадим сейчас несколько определений длины окружности. Все определения будут строиться по одной и той же схеме: тем или иным способом будет выбираться последовательность (Π_n) в п и с а н н ы х в окружность многоугольников и длиной окружности будет называться $L=\lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где P_n — периметр многоугольника Π_n. Друг от друга определения будут отличаться разным выбором последовательно (Π_n).

Дадим сначала несколько плохих определений.

«О п р е д е л е н и е» 1. $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — п р о и з -

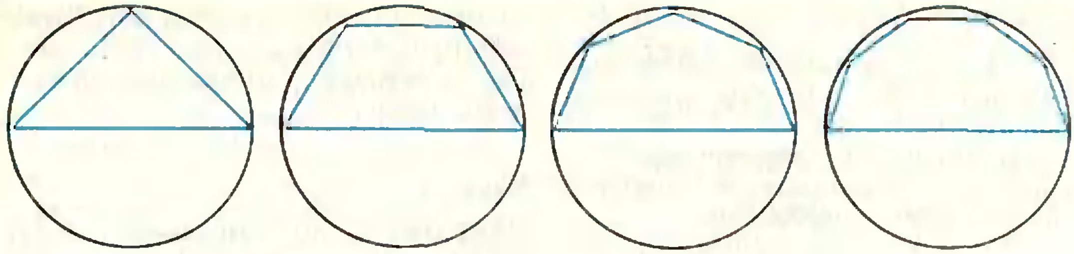


Рис. 1.

вольная последовательность вписанных многоугольников.

Это определение никуда не годится. Например, если при всех n многоугольник Π_n — это один и тот же вписанный в окружность квадрат, то (P_n) — постоянная последовательность, и в качестве длины окружности у нас получится периметр вписанного квадрата. Если же в последовательности (Π_n) стоят по очереди квадраты и правильные треугольники, то последовательность (P_n) предела не имеет (докажите!).

Обозначим через $\varphi(n)$ число сторон многоугольника Π_n, через $\psi(n)$ — длину его наибольшей стороны.

«Определение» 2. $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$ *).

Оказывается, и это определение некорретно. На рисунке 1 изображена последовательность (Π_n), удовлетворяющая «определению» 2 и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ не совпадает с тем, что мы хотели бы считать длиной окружности. Нетрудно также построить пример последовательности (Π_n), удовлетворяющей «определению» 2, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ не существует (постройте!).

«Определение» 3. $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = 0$.

К сожалению, и этот вариант не годится. На рисунке 2 изображена последовательность (Π_n), удовлетворяющая «определению» 3 и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$. Как и в «определениях» 1, 2, легко построить такую (Π_n), что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ не существует.

Хорошие определения длины окружности

Определение 4. $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где (Π_n) — такая последовательность, *что при всех n центр окружности* лежит внутри Π_n и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(n) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = 0$.

Можно доказать, что для любой (Π_n), удовлетворяющей определению 4, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ существует, причем он не зависит от выбора исходной последовательности (Π_n). Однако доказать это очень трудно. Поэтому определение 4 неудобно. Кроме того, оно некрасиво: уж очень много в нем разнородных требований.

*) То есть $\varphi(n)$ становится сколь угодно большим.

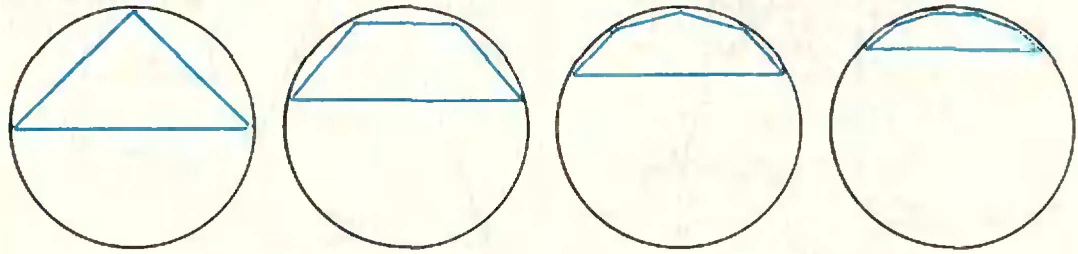


Рис. 2.

Определение 5. $L = \lim\limits_{n\to\infty} P_n$, где P_n — правильный вписанный n-угольник (ср. «Алгебра и начала анализа 9», п. 33).

В отличие от определений 1—3, в данном случае предел действительно существует. Докажем это.

Теорема. *Последовательность (P_n) возрастает и ограничена.*

Доказательство мы разобьем на ряд шагов, которые представим в виде задач. При их решении важно обойтись без тригонометрии, так как определение тригонометрических функций опирается на понятие длины окружности.

Задачи

1. Прямоугольные треугольники ABC и ADC имеют общий катет AC и $\widehat{BAC} < \widehat{DAC}$. Доказать, что $|AB| < |AD|$.

2. У прямоугольных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ гипотенузы AB и A_1B_1 конгруэнтны и $\widehat{BAC} < \widehat{B_1A_1C_1}$. Доказать, что $|A_1C_1| < |AC|$.

3. Острый центральный угол AOB разделен радиусами OM_1, OM_2, ..., OM_{k-1} на k конгруэнтных частей (рис. 3). Точка C — проекция точки A на $[OB]$, точка N_i — проекция точки M_i на $[AC]$ ($i = 1, 2, ..., k-1$). Доказать, что $|AN_1| < |N_1N_2| < ... < |N_{k-1}C|$.

4. Доказать, что $P_{n+1} > P_n$.

5. Доказать, что если один выпуклый многоугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего меньше, чем периметр внешнего. Покажите, что без условия выпуклости это утверждение неверно.

Итак, последовательность (P_n) возрастает (задача 4) и ограничена (для любого n периметр P_n меньше, чем периметр описанного квадрата — задача 5). По теореме Вейерштрасса*) она имеет предел. Значит, определение 5 корректно: *любая окружность имеет* (единственную) *длину.*

Число π

Обозначим длину окружности через L, ее диаметр — через d, радиус — через r, длину стороны правильного вписанного n-угольника — через a_n.

Теорема. *Отношение $\frac{L}{d}$ одинаково для всех окружностей.*

Поскольку

$$\frac{L}{d} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} P_n}{d} = \frac{1}{d}\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{d} = \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2r} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{r}n\right),$$

достаточно доказать, что одинаково для всех окружностей отношение $\frac{a_n}{r}$, а это вытекает из подобия треугольников, изображенных на рисунке 4.

Вот это самое отношение длины окружности к диаметру и принято обозначать греческой буквой π.

Буква π — первая буква греческого слова περιφέρια («окружность»). Впервые это обозначение использовал в 1706 году английский математик У. Джонс, но общепринятым оно стало после того, как его (начиная с 1736 года) стал систематически употреблять Л. Эйлер.

*) «Алгебра и начала анализа 9», п. 32.

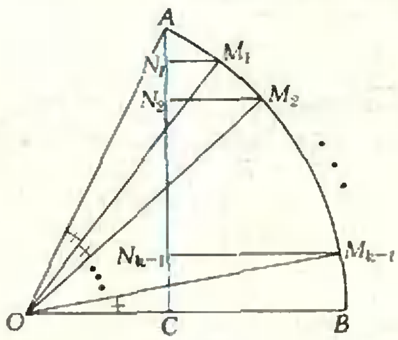


Рис. 3.

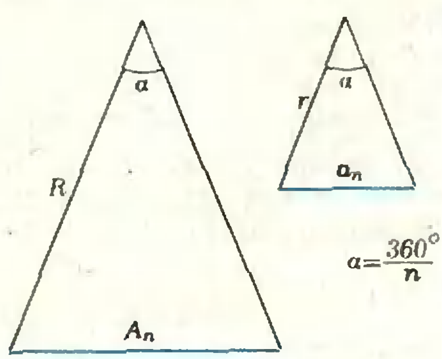


Рис. 4.

Другие хорошие определения

Разумеется, определение 5 не является единственно возможным. В определении 4 был указан эквивалентный вариант. Приведем еще несколько.

Определение 6. Пусть Δ_n — правильный **описанный** n-угольник, Q_n — его периметр; длиной окружности называется $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n$.

Последовательность (Q_n) является, конечно, убывающей.

Определение 7. Длина окружности — число $\lim\limits_{n\to\infty} P_{2^n}$: предел последовательности периметров правильных вписанных 2^n-угольников (Π_{2^2} — вписанный квадрат, Π_{2^3} — правильный вписанный восьмиугольник и т. д.).

В данном случае монотонность последовательности периметров очевидна; однако само определение довольно искусственно — не понятно, откуда взялось 2^n, получится ли тот же предел для Π_{3^n}.

Особняком стоит

Определение 8. Длина окружности — это число, которое больше периметра любого вписанного многоугольника и меньше периметра любого описанного многоугольника.

Это очень хорошее определение. К сожалению, доказательство существования такого числа опирается на теорему, отсутствующую в школьном курсе математики. Однако в предположении, что оно существует, можно доказать его единственность.

* * *

Определение — только первый шаг. Дальше надо заняться способами вычисления числа π, его свойствами — но об этом нужен отдельный разговор.

О числе π можно прочесть много интересного в книге Ф. Кымпан «История числа π» (М., «Наука», 1971).

Задачи наших читателей

1. Доказать, что число

$$246^{133^{77}} + 77^{246^{133}} + 133^{77^{246}}$$

делится на 190.

2. Найти две последние цифры числа 2^{2000}.

А. Пуляев
(г. Донецк)

3. Доказать, что число

$$5^{3^{4m}} - 2^{2^{4n+2}}$$

делится на 11 при любых натуральных m и n.

С. Майзус
(г. Запорожье)

4. Доказать, что при $n \geqslant 2$, $l = 0, 1, \ldots, 2n-2$

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \times \cos^l \frac{k\pi}{2n+1} = 0.$$

М. Левин
(г. Таллин)

5. Площадь треугольника равна S. Найти наименьшее значение длины
а) наибольшей стороны;
б) средней стороны.

А. Халамайзер
(г. Москва)

6. Дана окружность и точки A и B на ней. На хорде AB, как на основании, строится равнобедренный треугольник с вершиной на большей из двух дуг, стягиваемых хордой. На его боковой стороне опять строится равнобедренный треугольник с вершиной на большей из двух дуг, стягиваемых этой боковой стороной, и т. д. Доказать, что эти равнобедренные треугольники становятся все более близкими по форме к равностороннему треугольнику.

Э. Ясиновый
(г. Куйбышев)

7. Решить уравнение

$$\frac{1}{x+y+z+3} = \overline{0,0xyz}.$$

И. Михалкович
(Минская обл.)

Ниже мы публикуем две заметки о гармонических колебаниях. Гармонические колебания изучаются в начале 10 класса на уроках математики («Алгебра и начала анализа 10», § 16). Но они интересны не только с математической точки зрения — мы часто встречаемся с ними в самых разнообразных процессах в природе и технике — не даром гармонические колебания изучаются и на уроках физики («Физика 10», § 5, 6), в частности, в теме переменный электрический ток. Именно этой теме посвящены обе заметки. Их объединяет и математическое содержание: обе существенно опираются на так называемые векторные диаграммы гармонических колебаний.

Ж. Раббот

Знаете ли вы, что $\dfrac{220 \text{ вольт}}{127 \text{ вольт}} \approx \sqrt{3}$?

В сети переменного тока, как вы знаете, — напряжение 220 или 127 вольт. Оказывается, отношение 220 к 127 с большой точностью равно $\sqrt{3}$. В этом легко убедиться, разделив «столбиком» 220 на 127 и сравнив полученный результат 1,7322... со значением числа $\sqrt{3}$, взятым из таблиц: 1,7321...

В школьном физическом кабинете имеется напряжение 380 или 220 вольт. Если и в этом случае выполнить деление, вновь получим

$$380:220 \approx 1{,}73 \approx \sqrt{3}.$$

Случайно ли это?

Разобраться в этом нам поможет математика, точнее — результаты упражнений 69, 70 из учебника «Алгебра и начала анализа 10». Напомним нужные нам понятия и результаты:

а) Пусть точка $P(t)$ движется по окружности радиуса A против часовой стрелки так, что вектор $\vec{OP}(t)$ равномерно вращается вокруг начала координат O, проходя за единицу времени ω радиан ($\omega > 0$). Тогда проекция точки $P(t)$ на ось абсцисс совершает гармонические колебания с частотой ω и амплитудой A. Пусть в начальный момент времени $t=0$ вектор $\vec{OP}(0)$ составлял с положительным направлением оси $\vec{Ox}$ угол φ ($\varphi \in [0;\ 2\pi[$). Очевидно, вектор $\vec{OP}(0)$ определяет амплитуду $A = |\vec{OP}|$ и начальную фазу $\varphi = \vec{OP}(0); \vec{Ox}$ гармонического колебания. Этот вектор называется *векторной диаграммой* гармонического колебания.

б) Сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты — гармоническое колебание той же частоты. Векторная диаграмма суммы двух гармонических колебаний (рис. 1) равна сумме векторных диаграмм этих колебаний *). Аналогично — для разности (рис. 2).

Вернемся теперь в наш физический кабинет. На распределительном щитке имеется 4 клеммы: три «фазы» и «нуль». Напряжение на них подается от трехфазного генератора электрического тока. Мы не будем останавливаться на работе трехфазного генератора **), а лишь поясним отмеченный в заглавии нашей заметки факт с помощью векторных диаграмм.

Зависимость от времени напряжения между каждой из трех «фаз» и «нулем» — гармоническое колебание. Эти три колебания имеют одну

*) См. «Алгебра и начала анализа 10», п. 82, упр. 69, 70 и «Квант», 1976, № 11, с. 44. См. также «Физика 10», § 26.

**) Об этом рассказано в заметке А. Землякова и В. Орлова (с. 33).

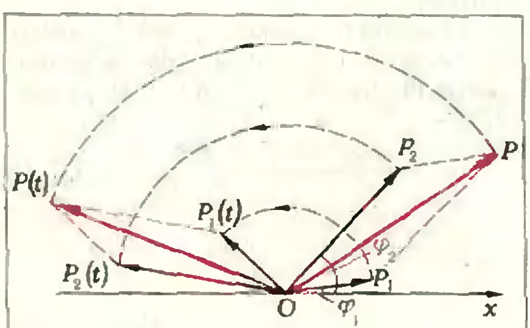


Рис. 1.

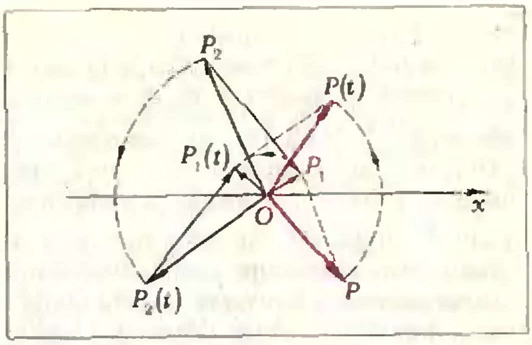


Рис. 2.

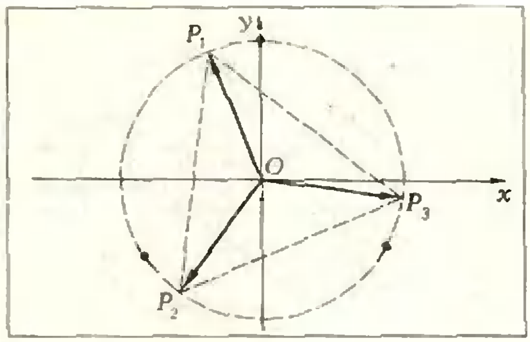


Рис. 3.

и ту же частоту ω и амплитуду A, но так отличаются фазами, что концы их векторных диаграмм образуют правильный треугольник (см. $\triangle P_1P_2P_3$ на рис. 3).

Напряжение между двумя «фазами» (например, между первой и второй) — тоже гармоническое колебание. Оно равно разности гармонических колебаний, соответствующих этим фазам. Поэтому его векторная диаграмма — разность векторных диаграмм $\overrightarrow{OP_1}$ и $\overrightarrow{OP_2}$ (рис. 3). Значит, амплитуда A_{12} этого напряжения равна длине стороны правильного треугольника $P_1P_2P_3$. Амплитуда A_{10} напряжения между «фазой» (скажем, первой) и «нулем» — длина вектора $\overrightarrow{OP_1}$, то есть $^2/_3$ высоты правильного треугольника $P_1P_2P_3$.

Таким образом, отношение амплитуды A_{12} к A_{10} равно отношению длины стороны правильного треугольника к $^2/_3$ его высоты. Но последнее отношение, конечно, равно $\sqrt{3}$*).

Так как действующее значение напряжения переменного тока пропорционально амплитуде напряжения, то поставленный нами вопрос исчерпан — понятно, почему $220/127 \approx \sqrt{3}$.

*) Мы доказали, что отношение р е а л ь н ы х н а п р я ж е н и й в электрической цепи в т о ч н о с т и равно $\sqrt{3}$. С другой стороны, $\frac{220}{127}$ равно $\sqrt{3}$ только п р и б л и ж е н н о. Отсюда вытекает, что если первое напряжение в цепи равно в точности 220 В, то второе равно не 127 В, а $\frac{220}{\sqrt{3}}$ В. В реальной же сети случайные отклонения напряжения все равно превосходят $\left|\frac{220}{127} - \sqrt{3}\right|$.

А. Земляков, В. Орлов

Трехфазный ток

Промышленные генераторы (например те, что установлены на гидроэлектростанциях) дают на самом деле не просто переменный ток (т. е. ток, меняющийся по гармоническому закону $i(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$), а ток с тремя разными фазами. В первой части заметки мы расскажем, как получается такой «трехфазный» ток, а во второй — почему его целесообразно использовать в электродвигателях. Как и в предыдущей заметке, здесь решающую роль играет тот же математический прием: сложение векторных диаграмм гармонических колебаний.

1. Генераторы переменного тока

Если проволочная рамка равномерно вращается в однородном магнитном поле, то поток магнитной индукции через рамку меняется по гармоническому закону:

$$\Phi(t) = (\vec{B}\cdot\vec{n})\cdot S = BS\cos\omega t,$$

где $\vec{B}$ — вектор магнитной индукции, S — ограниченная рамкой площадь,

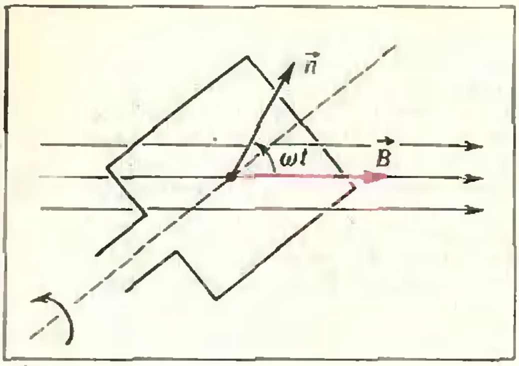


Рис. 1.

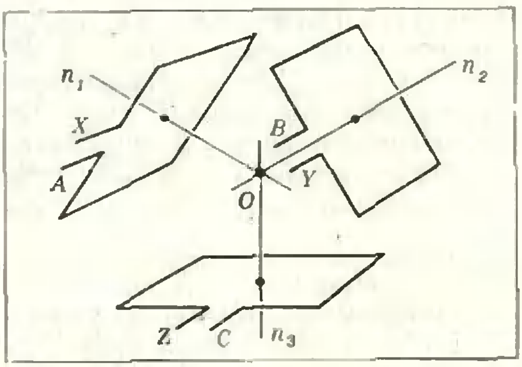


Рис. 2.

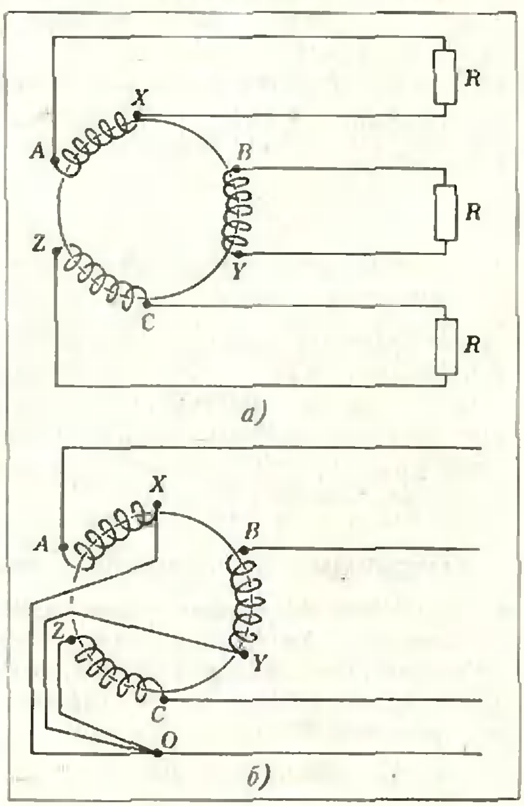


Рис. 3.

$\vec{n}$ — единичная нормаль к плоскости рамки, которая поворачивается с угловой скоростью ω и в момент времени t образует с вектором $\vec{B}$ угол ωt; мы считаем, что ось вращения рамки перпендикулярна вектору $\vec{B}$ (рис. 1). В результате действия силы Лоренца свободные заряды, движущиеся в поле вместе с рамкой, начинают перемещаться вдоль проводников рамки, в которой возникает ЭДС индукции, равная

$$e = -\Phi'(t) = \omega BS \sin \omega t.$$

Напряжение между концами рамки также будет меняться по гармоническому закону, и в соответствующей замкнутой цепи возникает переменный электрический ток:

$$i(t) = I \cos(\omega t + \varphi).$$

Такова простейшая модель *генератора переменного электрического тока* (ср. «Физика 10», § 21).

В промышленных генераторах вращается не рамка, а магнитное поле, и ЭДС создается в неподвижной обмотке, причем на самом деле с р а з у в т р е х одинаковых обмотках, расположенных под углом 120° одна к другой (рис. 2). Это приводит к тому, что получающиеся электрические колебания сдвинуты по фазе друг относительно друга на $2\pi/3$ — например, для ЭДС индукции можно записать:

$$e_1 = \mathscr{E} \sin \omega t,$$

$$e_2 = \mathscr{E} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$e_3 = \mathscr{E} \sin\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

(объясните). Соответствующая система токов называется *трехфазной*; она была предложена в 1888 году русским электротехником М. О. Доливо-Добровольским и ныне применяется во всем мире. Зачем же нужна трехфазная система токов? Каковы ее преимущества?

Прежде всего объясним, как подключается нагрузка к трехфазному генератору. Если ко всем трем обмоткам подсоединить одинаковые нагрузки (рис. 3а), то амплитуда силы тока во всех трех цепях будет одна и т. д.:

$$i_1 = I\cos(\omega t + \varphi),$$

$$i_2 = I\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$i_3 = I\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Складывая эти гармонические колебания с помощью векторных диаграмм *) (рис. 4), получим: $i_1 + i_2 + i_3 = 0$. Поэтому, если провода X, Y и Z объединить в один провод (как на рисунке 3б), то сила тока в нем будет равна нулю! Именно так и передается ток от трехфазных генераторов — по трем линиям A, B, C и по нулевому проводу 0. При симметричной нагрузке (как выше) нулевой провод не нужен, но если нагрузка не симметрична, как, например, в осветительной сети в домах (рис. 5), то в нулевом проводе возникает небольшой «компенсационный» ток.

Главное преимущество, которое дает трехфазная система токов, заключается в простоте электрических двигателей трехфазного тока, принцип действия которых мы сейчас рассмотрим.

2. Электродвигатели переменного тока

Пусть по обмотке L течет переменный ток частоты ω. Тогда он создает переменное магнитное поле, которое вблизи оси обмотки L (рис. 6) приблизительно однородно и направлено вдоль $\vec{n}$, причем индукция поля также меняется по гармоническому закону, так что можно записать вектор индукции в виде

$$\vec{B} = B\cos\omega t \cdot \vec{n}.$$

Если поместить около оси n замкнутую металлическую рамку K с осью вращения, перпендикулярной n (рис. 6), то в рамке возникнет индукционный ток, и на нее будут действовать силы Ампера («Физика 9», п. 120),

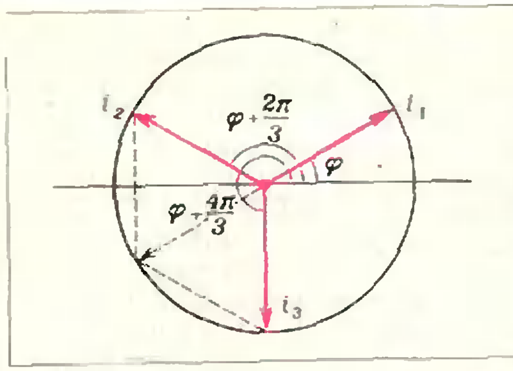


Рис. 4.

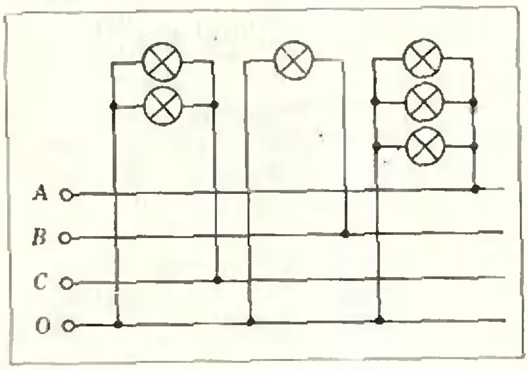


Рис. 5.

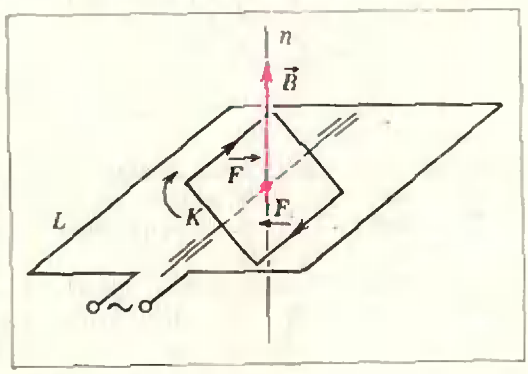


Рис. 6.

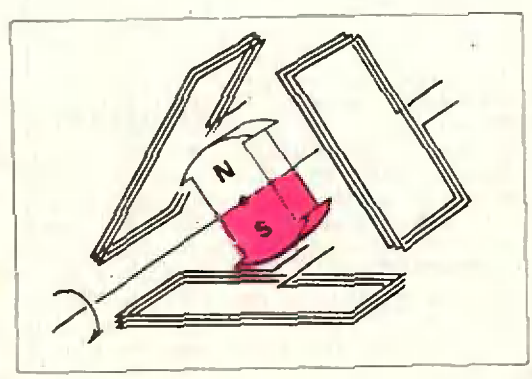


Рис. 7.

*) См. «Физика 10», § 26; «Алгебра и начала анализа 10», п. 82, упр. 69—70; «Квант», 1976, № 11, ст. «Сложение гармонических колебаний».

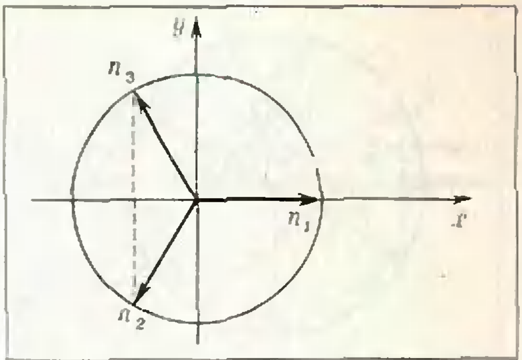


Рис. 8.

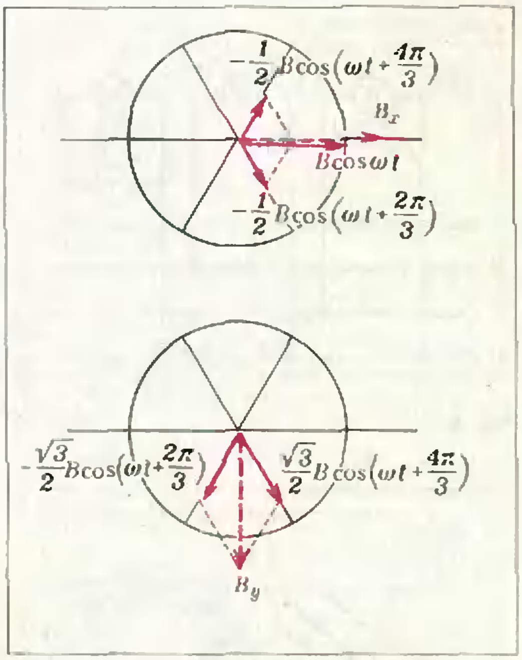


Рис. 9.

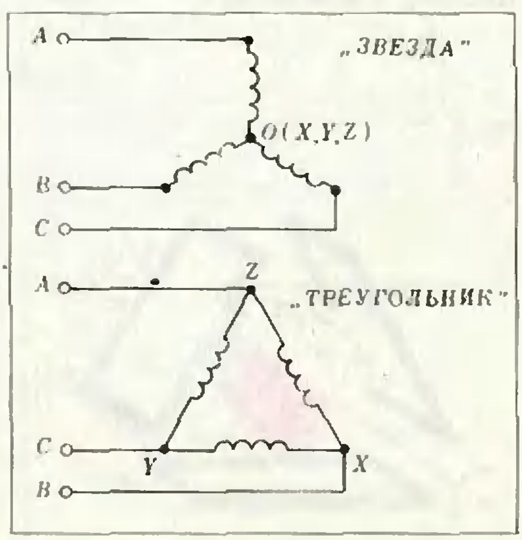


Рис. 10.

направленные перпендикулярно направлению тока и вектору $\vec{B}$. Эти силы создают вращающий момент, поворачивающий рамку около ее оси. Однако в положении, когда рамка перпендикулярна оси n, этот вращающий момент равен нулю; чтобы вращение началось, необходимо вывести рамку из этого положения — впоследствии рамка будет проходить это положение по инерции, хотя и неравномерно, но будет вращаться. Таков принцип работы электродвигателей однофазного переменного тока.

Оказывается, если подключить трехфазный ток к трем обмоткам, расположенным под углом 120° одна к другой, как показано на рисунке 7, то магнитное поле вблизи точки O пересечения осей симметрии обмоток постоянно по величине и будет равномерно вращаться с угловой скоростью ω.

Чтобы обосновать это, найдем сумму $\vec{B}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3$ векторов магнитной индукции, создаваемых токами в обмотках AX, BY, CZ:

$$\vec{B}_1=B\cos\omega t\cdot\vec{n}_1,$$
$$\vec{B}_2=B\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\vec{n}_2,$$
$$\vec{B}_3=B\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right)\cdot\vec{n}_3,$$

где $\vec{n}_i$ — соответствующие единичные нормали. Введем на плоскости, проходящей через оси обмоток, систему координат, направив ось Ox вдоль вектора $\vec{n}_1$; координаты векторов $\vec{n}_i$ в этой системе будут (см. рис. 8)

$$\vec{n}_1=(1;\ 0),$$
$$\vec{n}_2=\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$
$$\vec{n}_3=\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Используя формулы для векторов $\vec{B}_i$, отсюда находим координаты суммы $\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3=\vec{B}$:

$$B_x=B\cos\omega t-\frac{1}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)-$$
$$-\frac{1}{2}B\cos\left(\omega t+\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$B_y = -\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right).$$

Складывая гармонические колебания, записанные в правых частях этих формул, с помощью векторных диаграмм (рис. 9), получаем:

$$B_x = \frac{3}{2}B\cos\omega t,$$

$$B_y = \frac{3}{2}B\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{2}B\sin\omega t.$$

Следовательно,

$$\vec{B} = (B_x;\ B_y) = \left(\frac{3}{2}B\cos\omega t;\ \frac{3}{2}B\sin\omega t\right),$$

т. е. вектор магнитной индукции суммарного поля имеет длину $3B/2$ и равномерно вращается с угловой скоростью ω.

Если поместить в это вращающееся поле замкнутую металлическую рамку (ротор) на оси, направленной вдоль оси, около которой вращается вектор магнитной индукции суммарного поля, то поток магнитной индукции через рамку будет меняться, и в рамке возникнет индукционный ток. Появляющиеся силы Ампера создают вращающийся момент, который, как легко увидеть, используя правило Ленца («Физика 9», п. 125), все время разгоняет рамку в направлении вращения магнитного поля. По мере приближения скорости вращения рамки к скорости вращения поля момент сил, действующих на рамку, уменьшается (объясните). При достижении ротором угловой скорости ω момент сил становится равным 0; вследствие трения вращение ротора замедляется, вновь возвращающий момент сил «подгоняет» ротор, и так далее. В среднем ротор будет вращаться, несколько запаздывая по сравнению с полем, асинхронно с ним — с меньшей угловой скоростью. Электродвигатели такого типа называются *асинхронными*.

Трехфазный асинхронный двигатель является симметричной нагрузкой, поэтому для его питания достаточно трехпроводной линии (см. п. 1). На практике обмотки двигателя подключают по схемам «звезды» или «треугольника», как показано на рисунке 10. Асинхронные двигатели просты в изготовлении и надежны в эксплуатации, поэтому большая часть (около 95%!) всех электродвигателей, используемых в нашей стране и за рубежом, относится к этому типу. Первый трехфазный асинхронный двигатель был сконструирован М. О. Доливо-Добровольским.

Вопросы

1. Сколько оборотов в минуту делает ротор асинхронного двигателя, если частота переменного тока равра 50 гц, а запаздывание ротора по сравнению с магнитным полем в скорости вращения составляет 5%?

2. Что произойдет, если после подключения асинхронного двигателя по схеме звезды или треугольника поменять друг с другом провода A и B?

3. Как следует подключать обмотки асинхронного двигателя, рассчитанного на напряжение 220 в, к сети трехфазного тока с напряжениями: а) 220 в/127 в, б) 380 в/220 в? (См. статью Ж. Раббота на с. 32.)

Активный эскадрон

Группу коней, размещенных на бесконечной шахматной доске, назовем *эскадроном*, если конями этой группы можно последовательно сделать бесконечное число ходов так, чтобы после каждого хода каждый из них находился под защитой хотя бы одного коня этой же группы. Очевидно, что эскадрон не может состоять менее, чем из трех коней. В самом деле, в составе эскадрона, кроме коня, совершающего ход, должен быть конь, защищающий его до совершения хода и после совершения хода. Вспомнив о том, что шахматный конь при своем ходе меняет цвет занимаемого поля, можно утверждать, что обе упомянутые функции не могут быть выполнены одним конем. Эскадрон назовем *активным*, если, перемещаясь по шахматной доске, он может занять одним из своих коней любое наперед заданное поле. Найдите минимальный активный эскадрон.

В. Чванов

Задачи

1. а) Докажите, что если к произвольному числу с нечетным количеством цифр приписать его еще раз, то полученное число разделится на одиннадцать.

б) Докажите, что если к произвольному числу приписать число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то полученное число также разделится на одиннадцать.

2. При каких натуральных n число n^4+n^2+1 является простым?

3. Семь школьников решили за воскресенье обойти семь кинотеатров. В каждом кинотеатре восемь сеансов. В разных кинотеатрах сеансы начинаются в одно и то же время. На каждый сеанс шестеро школьников шли вместе, а седьмой (не обязательно один и тот же) шел в другой кинотеатр. К вечеру каждый школьник побывал в каждом кинотеатре. Докажите, что в каждом кинотеатре был сеанс, на котором не присутствовал ни один из этих школьников.

4. Беседуя с гостями в конце 1975 года, хозяин пошутил, что люди часто не любят называть свой возраст.

— Я бы, например, на вопрос о возрасте сказал, что мой возраст является делителем моего года рождения.

— Хоть я и значительно моложе,— сказал один из гостей,— но могу то же утверждать и о своем возрасте.

Далее выяснилось, что сын хозяина мог сказать то же о себе в 1961 году, а один из внуков, недавно получивший офицерское звание,— в 1963. А вот покойный отец хозяина мог бы сказать то же о себе в 1962 году.

В какие же годы родились названные лица?

В. Касаткин

Сообразительная Аня

Поводом для этого рассказа послужил доклад, который сделала нынешним летом на традиционных сборах «Малой академии наук» школьников Крыма Аня Шаховская. Живет Аня в поселке Научный вблизи Бахчисарая. Сейчас она учится в восьмом классе. Аня на год моложе Малой академии — ей в этом году исполнилось 14 лет.

Однажды летом, когда Аня была в туристском лагере, ее назначили ответственной за выдачу продуктов туристам.

— Смотри не ошибись, подсчитывай все верно, — напутствовал ее начальник лагеря, — вычислительной машины у нас нет.

— Не волнуйтесь, я что-нибудь придумаю.

И Аня придумала. В ближайшем магазине ей удалось раздобыть чашечные весы и несколько гирь.

Утром все сбежались смотреть, как Аня отпускает крупу туристам. К сожалению, Ане удалось найти только 5 гирь — массой в 1 г, 3 г, 9 г, 27 г и 81 г. Тем не менее Аня, по-видимому, не испытывала затруднений. Она ловко расставляла гири то на пустой чаше весов, то на чаше с пакетами крупы. При этом она делала какие-то непонятные, на первый взгляд, записи. Отпустив 35 г крупы, она записала: $110\bar{1}$; после взвешивания 52 г появилась запись: $1\bar{1}011$; в следующую строчку она записала $11\bar{1}01$ и сказала:

— Все, последние 100 грамм я взвесила. Работа закончена.

После этого она взяла в руки счеты необычной конструкции и, заглядывая в сделанные записи, начала быстро на них работать. Это было удивительное зрелище.

Через несколько минут Аня закончила вычисления и удовлетворенно заметила:

— Все верно, ни одной ошибки.

Многочисленным зрителям захотелось разобраться, как работала Аня. По их просьбе она рассказала:

Мы привыкли к тому, что в любой системе счисления для цифр используются только целые **положительные** числа (и цифра 0). Можно, однако, представить себе систему счисления, в которой в роли цифр будут использоваться и целые **отрицательные** числа. Поскольку массы гирь, которые оказались в моем распоряжении, были степенями тройки, я вспомнила о так называемой *уравновешенной троичной системе.*

Основанием системы является число 3, в роли цифр используются значки: 1, 0 и $\bar{1}$ (читается: «единица с чертой»). Записи, которые я делала, и были записями чисел в этой системе. Вот как их надо понимать:

$$110\bar{1}=1\cdot3^3+1\cdot3^2+0\cdot3^1-1\cdot3^0=35,$$

$$1\bar{1}0\bar{1}1=1\cdot3^4-1\cdot3^3+0\cdot3^2-1\cdot3^1+1\cdot3^0=52,$$

$$11\bar{1}01=1\cdot3^4+1\cdot3^3-1\cdot3^2+0\cdot3^1+1\cdot3^0=100.$$

Если я ставила гирю на чашу с крупой, то ее масса вычиталась, и при записи я писала в разряде, соответствующем массе гири, цифру «$\bar{1}$». Если мне нужно взвесить, например, 24 г, то на чашу весов без груза (без крупы) я положу гирю в 27 г, а на другую чашу — гирю в 3 г и запишу: $10\bar{1}0=1\cdot3^3+0\cdot3^2-1\cdot3^1+0\cdot3^0=24$.

Записи чисел в этой системе могут начинаться и цифрой «$\bar{1}$» — так записываются отрицательные числа. Пример:

$$\bar{1}1\bar{1}=-1\cdot3^2+1\cdot3^1-1\cdot3^0=-7.$$

Над числами, записанными в уравновешенной троичной системе счисления, нетрудно производить действия сложения и умножения.

Вот как просто выглядят таблицы сложения и умножения цифр:

Таблица сложения

+	1	0	$\bar{1}$
1	$1\bar{1}$	1	0
0	1	0	$\bar{1}$
$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}1$

Таблица умножения

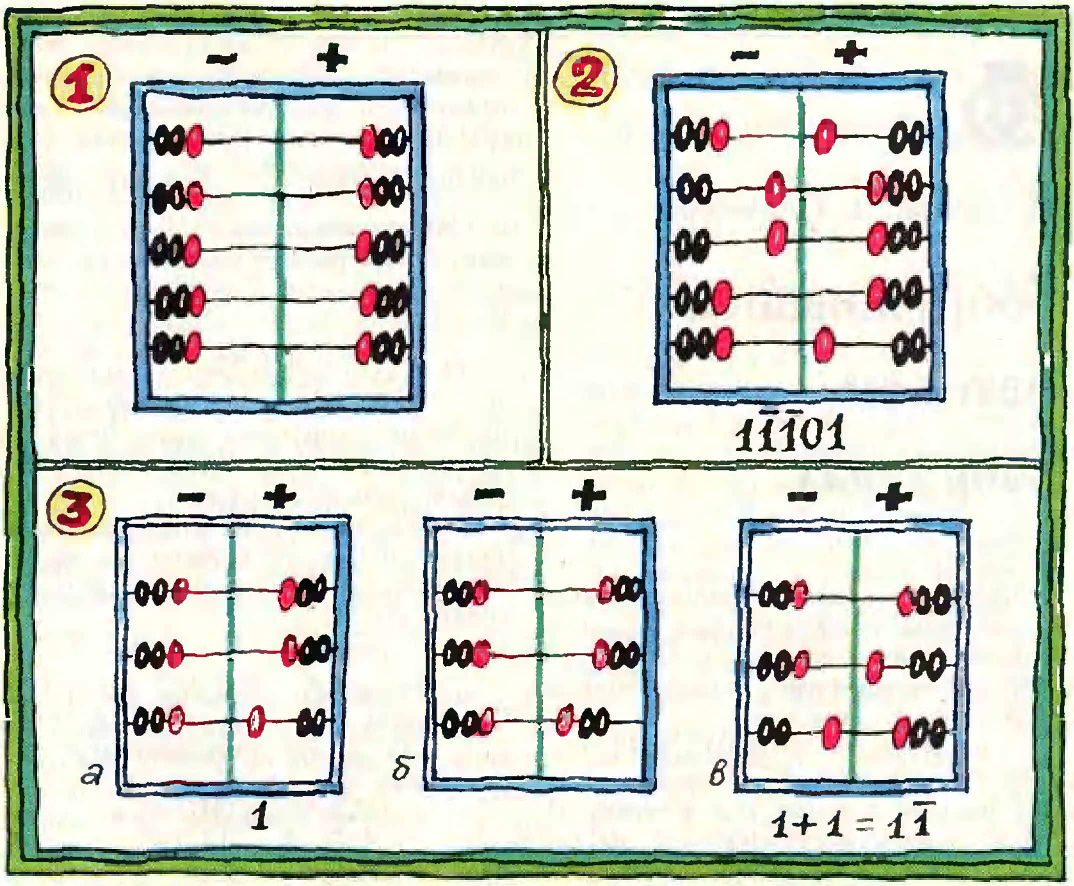
×	1	0	$\bar{1}$
1	1	0	$\bar{1}$
0	0	0	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1

Несколько примеров на сложение и умножение:

$$+\begin{array}{r} 111 \\ 101 \\ \hline 1\bar{1}0\bar{1} \end{array} \qquad +\begin{array}{r} \bar{1}110 \\ \bar{1}10 \\ \hline \bar{1}1\bar{1}0 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} 1\bar{1} \\ \bar{1}1 \\ \hline 1\bar{1} \\ \bar{1}1 \\ \hline \bar{1}\bar{1} \end{array}$$

Чтобы упростить работу, я использовала счеты, специально придуманные мною для сложения чисел в уравновешенной троичной системе. Эти счеты изображены на рисунке 1. Главная особенность — вертикальная перегородка, слева от которой расположены «отрицательные» косточки, а справа — «положительные». На рисунке 2 на счетах отложено число $1\bar{1}\bar{1}01$. Вторая особенность — черные косточки скреплены друг с другом.

Научимся прибавлять на этих счетах единицу. Пусть нам нужно найти сумму 1+1. Как это делается, видно из рисунков 3, *а* — *в*. На рисунке 3, *б* скрепленные черные косточки придвинуты к уже отложенной косточке; поэтому, сбрасывая с проволочки все три косточки вправо, мы должны на этой же проволочке отложить одну отрицательную косточку, а на следующей проволочке — одну «положительную» косточку (она, как ей это и положено, заменяет сброшенные косточки первой проволочки) — см. рис. 3, *в*. Результат можно проверить, заглянув в таблицу сложения цифр. Рассуждая аналогично, можно научиться складывать отрицательные единицы.



Заметим, что если на счетах есть по косточке с обеих сторон вертикальной перегородки, то их следует сбросить: $1+\bar{1}=0$. Небольшая тренировка — и вы научитесь пользоваться этими необычными счетами.

Не думайте, что система счисления, о которой я вам рассказала,— только математическая забава. В СССР и Чехословакии построены ЭВМ, работающие на этой системе счисления. Советская машина называется «Сетунь» (по имени подмосковной реки). Ее создали инженеры и математики вычислительного центра Московского университета. Их привлекли две особенности этой системы счисления: отсутствие «правил знаков» при выполнении арифметических действий над числами и простота получения противоположного числа — число, противоположное данному, получается, если каждую цифру «1» данного числа заменить на «$\bar{1}$» и наоборот.

За изобретенные счеты и хороший доклад об уравновешенной троичной системе Аню Шаховскую избрали действительным членом Малой академии наук.

И. Габович, П. Горнштейн

Вооружившись методом координат

О применении координатного метода к решению геометрических задач в «Кванте» уже писалось *). В настоящей статье затронуты новые аспекты этой важной темы.

Задача 1 (МИЭМ, 1977 г.). *При повороте координатной плоскости на угол α с центром в точке M точка A (1; 2) переходит в A_1 (6; 5), а B (1; 4) — в B_1 (4; 5). Найти образ точки C (1; 3). Найти образ еще одной точки (по вашему усмотрению). Найти величину угла α и координаты точки M.*

Решение. Отметим на координатной плоскости точки A, A_1, B, B_1 и C (рис. 1). Для определения координат (x; y) точки M воспользуется тем, что поворот является перемещением и поэтому $|MA|^2=|MA_1|^2$ и $|MB|^2=|MB_1|^2$, т. е.

$$\begin{cases}(x-1)^2+(y-2)^2=(x-6)^2+(y-5)^2\\ (x-1)^2+(y-4)^2=(x-4)^2+(y-5)^2.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $x=2$ и $y=6$.

Пусть $R_M^{\alpha}(C)=C_1$. Определим координаты (x_1; y_1) точки C_1. Точка C, как нетрудно заметить, является серединой $[AB]$, и поэтому ее образ — точка C_1 — является серединой $[A_1B_1]$. Учитывая это, получаем, что точка C_1 имеет координаты (5; 5).

Определим теперь величину угла α. Заметив, что абсциссы точек A и B одинаковы ($[AB]\,||\,[Oy)$) и ординаты точек A_1 и B_1 одинаковы ($[A_1B_1]\,||\,[Ox)$), заключаем, что модуль угла поворота равен $\frac{\pi}{2}$. Так как поворот на 90°, совмещающий $[MA]$ с $[MA_1]$, направлен против часовой стрелки, $\alpha=+\frac{\pi}{2}$.

Осталось найти образ еще одной точки («по нашему усмотрению»). Проще всего, конечно, взять точку M (2; 6), образ которой совпадает с ней самой. Задача решена.

Чтобы научиться решать подобные задачи (они часто попадаются на экзаменах), вычислим образ еще одной точки (D).

Пусть D (3; 1) и $R_M^{\frac{\pi}{2}}(D)=D_1$. Определим координаты ($x$; y) точки D_1. Для этого воспользуемся равенствами

$$|MD_1|^2=|MD|^2 \quad\text{и}\quad |A_1D_1|^2=|AD|^2,$$

равносильными системе

$$\begin{cases}(2-x)^2+(6-y)^2=26\\ (6-x^2)+(5-y)^2=5.\end{cases}\qquad (1)$$

Решая систему (1), находим

$$\begin{cases}x_1=7\\ y_1=7\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=\frac{101}{17}\\ y_2=\frac{47}{17}.\end{cases}$$

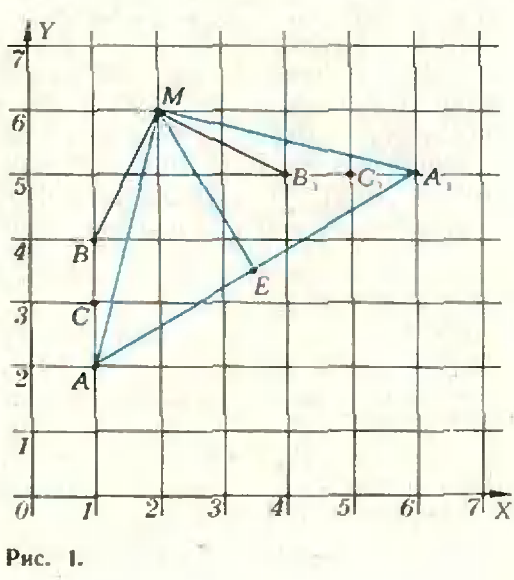


Рис. 1.

*) № 11 за 1977 г.

Теперь необходимо выяснить, какое из полученных решений является координатами точки D_1. Взглянув на чертеж, читатель сразу увидит, что правильным является первое решение, а второе — постороннее. На экзамене, однако, требуется **строгое обоснование** выбора правильного решения. Прежде чем привести это обоснование, выясним геометрический смысл полученных решений и объясним, почему их два.

Первое уравнение системы (1) есть уравнение окружности с центром в точке M и радиусом, равным $|MD|$ (рис. 2). Второе уравнение системы (1) — уравнение окружности с центром в точке A_1 и радиусом, равным $|AD|$. Вторая окружность пересекает первую в двух точках — $D_1'(7;\ 7)$ и $D_1''\left(\frac{101}{17};\ \frac{47}{17}\right)$, одна из которых является образом точки D. (Если же точка D принадлежит, например, $[MA)$, то вторая окружность будет касаться первой, и мы получим одно решение системы (1), которое и будет искомым.)

Ясно, что $\triangle DMD_1'$ и $\triangle DMD_1''$ — равнобедренные и лишь один из углов $\widehat{DMD_1'}$, $\widehat{DMD_1''}$ равен α $\left(\text{в нашей задаче } \alpha=\frac{\pi}{2}\right)$. Определим, какой. Рассмотрим $\triangle DMD_1'$. Найдем $|DD_1'|$:

$$|DD_1'| = \sqrt{(7-3)^2+(7-1)^2} = \sqrt{52}.$$

Пусть F — середина $[DD_1']$, тогда $|DF| = \frac{1}{2}\sqrt{52}$. Из $\triangle DMF$:

$$\sin\widehat{DMF} = \frac{|DF|}{|DM|} = \frac{\sqrt{52}}{2\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\widehat{DMF} = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \widehat{DMD_1'} = \frac{\pi}{2}.$$

Замечание. Из двух точек, получающихся при отыскании образа некоторой точки $N(a;\ b)$, естественно выбрать для проверки ту, координаты которой «проще» (это облегчает вычисления). Если выяснится, что выбранная для проверки точка дает нужное решение, то она и является образом точки N. Если — не дает, то, естественно, образом точки является вторая точка.

Задача 2 (МФТИ, 1977 г.). *На координатной плоскости расположен квадрат $ABCD$. Вершины A и B квадрата лежат на графике функции $y=x^2$, и вершины C и D — на графике функции $y=x-4$. Определить длину стороны квадрата.*

Решение. На координатной плоскости (рис. 3) изображены графики функций $y=x^2$, $y=x-4$ и квадрат $ABCD$, расположенный так, как указано в условии. Поскольку прямая $y=x-4$ перпендикулярна прямой $y=-x$, $[AC]\parallel(Ox)$ и $[BD]\parallel(Oy)$. Пусть $|AC|=l$ и $A(x_1;\ y_1)$, тогда:

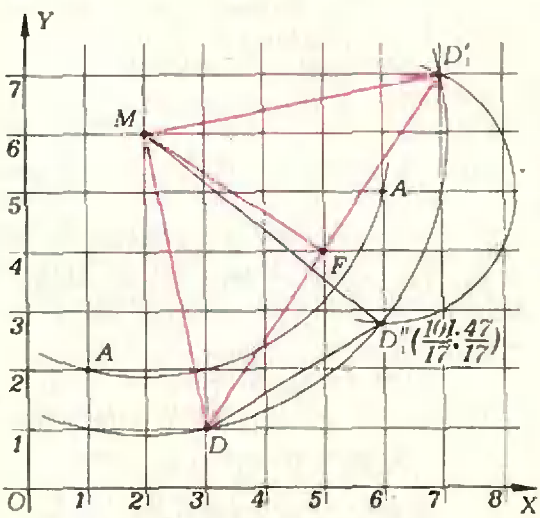


Рис. 2.

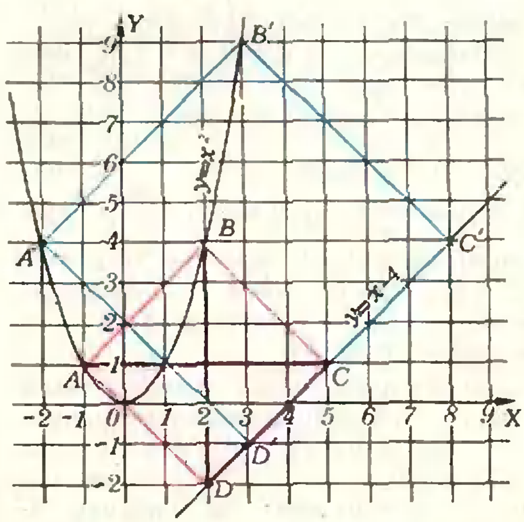


Рис. 3.

$C(x_1+l;\ y_1)$; $B\left(x_1+\frac{l}{2};\quad y_1+\frac{l}{2}\right)$; $D\left(x_1+\frac{l}{2};\ y_1-\frac{l}{2}\right)$. Найдем l. Учитывая, что вершины A и B лежат на графике функции $y=x^2$, а вершина D принадлежит графику функции $y=x-4$, составляем систему:

$$\begin{cases} y_1=x_1^2 \\ y_1+\frac{l}{2}=\left(x_1+\frac{l}{2}\right)^2 \\ y_1-\frac{l}{2}=x_1+\frac{l}{2}-4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1=x_1^2 \\ x_1^2+\frac{l}{2}=\left(x_1+\frac{l}{2}\right)^2 \\ x_1^2-\frac{l}{2}=x_1+\frac{l}{2}-4. \end{cases} \qquad (2)$$

Из второго уравнения системы (2) находим x_1:

$$x_1=\frac{2-l}{4}.$$

Найденное значение x_1 подставляем в последнее уравнение системы (2):

$$\left(\frac{2-l}{4}\right)^2-\frac{l}{2}=\frac{2-l}{4}+\frac{l}{2}-4,$$

откуда $l_1=6$ и $l_2=10$.

Таким образом, для стороны квадрата мы получили два значения: $3\sqrt{2}$ и $5\sqrt{2}$, т. е. задача имеет два решения (на рисунке 3 им соответствуют два квадрата: красный и синий).

Задача 3 (МГУ, физфак, 1977 г.). *Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ $((KK_1)\,||\,(LL_1)\,||\,(MM_1)\,||\,(NN_1))$ равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка KA равна $\frac{1}{4}$. На ребре MM_1 взята точка B так, что длина отрезка M_1B равна $\frac{2}{5}$. Через центр куба O и точки A и B проведена плоскость α. Точка P — проекция вершины K_1 на плоскость α. Найти длину отрезка AP.*

Решение. Для решения этой задачи с помощью метода координат нет необходимости строить сечение куба плоскостью α. (Это сечение, однако, изображено на рисунке 4, а ниже мы объясним, как его построить). В качестве системы координат мы возьмем систему $Lxyz$, где оси Lx, Ly, Lz направлены по $[LK)$, $[LM)$, $[LL_1)$ соответственно.

Треугольник AK_1P — прямоугольный, так как $[K_1P]\perp\alpha$ по условию. Поэтому

$$|AP|=\sqrt{|AK_1|^2-|K_1P|^2}. \qquad (3)$$

Найдем координаты точек A, B, O и K_1: $A\left(\frac{3}{4};\ 0;\ 0\right)$; $B\left(0;\ 1;\ \frac{3}{5}\right)$; $O\left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$ и $K_1(1;\ 0;\ 1)$.

Из $\triangle KK_1A$ находим $|AK_1|^2=1\frac{1}{16}$. Длину отрезка K_1P найдем, как расстояние от точки K_1 до плоскости α, воспользовавшись формулой

$$\rho(K_1;\alpha)=\frac{|ax_0+bx_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \qquad (4)$$

где $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — координаты точки K_1, а числа a, b, c и d — коэффициенты уравнения

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (5)$$

определяющего плоскость α (см. «Квант», 1977 г., № 3, с. 38).

Чтобы найти значения a, b, c и d, подставим в уравнение (5) координаты точек A, B и O. Получим систему:

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a+d=0 \\ b+\frac{3}{5}c+d=0 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2}+d=0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $a=-\frac{4}{3}d$; $b=-\frac{3}{2}d$ и $c=\frac{5}{6}d$.

Подставив найденные значения a, b и c в (5), после элементарных преобразований получаем уравнение плоскости α:

$$8x+9y-5z-6=0.$$

Теперь по формуле (4) определим

$$|K_1P|=\rho(K_1;\alpha)=$$
$$=\frac{|8\cdot1+9\cdot0-5\cdot1-6|}{\sqrt{64+81+25}}=\frac{3}{\sqrt{170}}.$$

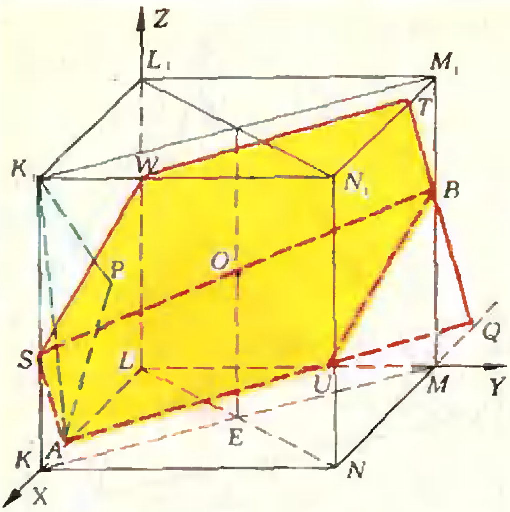


Рис. 4.

И, наконец, из (3) находим $|AP|$:

$$|AP| = \sqrt{\frac{17}{16} - \frac{9}{170}} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1373}{85}}.$$

З а м е ч а н и е. На «чистовике» решения этой задачи приводить чертеж не обязательно. Полезно, однако, сделать чертеж на черновике. Ради большей наглядности мы приводим здесь построение сечения данного куба плоскостью α (рис. 4). Находим точку S, в которой прямая OB, принадлежащая α, пересечет ребро KK_1. $[SA]$ — отрезок, по которому α пересекает грань KK_1L_1L. Ясно, что α пересекает грань NN_1M_1M по отрезку BT, параллельному $[AS]$. $Q=(BT)\cap(MN)$; очевидно, $Q\in\alpha$ и $Q\in(KLM)$, $(AQ)=\alpha\cap\cap(KLM)$; находим $U=(AQ)\cap(LM)$. Теперь уже построение сечения не вызывает затруднений.

З а д а ч а 4 (МГУ, мехмат, 1977 г.). *Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.*

Р е ш е н и е *). $SABC$ (рис. 5) — данная в условии пирамида. Точки E и F — середины ребер BC и AB соответственно. Введем систему координат, как показано на рисунке *), и определим координаты вершин пирамиды и точек E и F: $A\,(0;\ 4\sqrt{2};\ 0)$; $B\,(2\sqrt{6};\ 2\sqrt{2};\ 0)$ (абсцисса точки B находится как высота равностороннего треугольника из соотношения $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где h — высота и a — сторона треугольника); $C\ (0;\ 0;\ 0)$; $S\ (0;\ 0;\ 2)$; $E\ (\sqrt{6};\ \sqrt{2};\ 0)$ и $F(\sqrt{6};\ 3\sqrt{2};\ 0)$. Угол между скрещивающимися прямыми находится с помощью скалярного умножения векторов $\overrightarrow{SE}$ и $\overrightarrow{CF}$ (см. «Квант», 1978, № 2, с. 60); он равен $\frac{\pi}{4}$.

Для определения расстояния между скрещивающимися прямыми проведем в (ABC) через точку E прямую, параллельную (CF); G — точка, в которой эта прямая пересекает сторону AB. Очевидно, что координаты G будут $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2};\ \frac{5\sqrt{2}}{2};\ 0\right)$ (проверьте самостоятельно).

Пересекающиеся прямые SE и EG (или, что то же, три точки: S, E, G) определяют некоторую плоскость

$$ax+by+cz+d=0, \qquad (6)$$

которая параллельна прямой CF (так как $(EG)\parallel(CF)$) и содержит (SE). Поэтому расстояние от любой точки (CF) до (SEG) равно расстоянию между скрещивающимися прямыми SE и CF.

Определим теперь значения коэффициентов a, b, c и d в уравнении (6).

*) В «Кванте», 1978 г., № 2, с. 59—60 изложены два решения этой задачи: непосредственно геометрическое и векторное.

*) Здесь чертеж простой, и его целесообразно привести в «чистовике» решения.

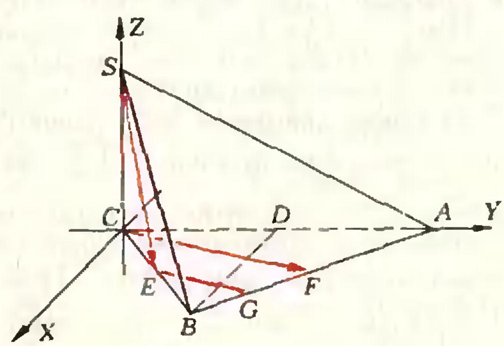


Рис. 5.

Подставив в уравнение (6) координаты точек S, E и G, получаем систему

$$\begin{cases} 2c + d = 0 \\ \sqrt{6}a + \sqrt{2}b + d = 0 \\ \dfrac{3\sqrt{6}}{2}a + \dfrac{5\sqrt{2}}{2}b + d = 0, \end{cases}$$

из которой находим: $a = -\dfrac{\sqrt{6}}{4}d$; $b = \dfrac{\sqrt{2}}{4}d$ и $c = -\dfrac{1}{2}d$.

Подставив найденные значения a, b и c в (6), после элементарных преобразований получаем уравнение

$$\sqrt{6}x - \sqrt{2}y + 2z - 4 = 0.$$

В качестве произвольной точки прямой (CF) выберем точку C и определим (аналогично тому, как мы это сделали в предыдущей задаче) ее расстояние до (SEG):

$$\rho(C; (SEG)) = \frac{|-4|}{\sqrt{6+2+4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Итак, искомое расстояние между скрещивающимися прямыми SE и CF равно $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Задача 5 (МФТИ, 1976 г.). *Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{6}$ см, а высота — 3 см. Вершина A куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в центре основания пирамиды, вершина C_1 — на высоте пирамиды, а ребро CD лежит в плоскости одной из боковых граней. Найти длину ребра куба.*

Решение. Пусть ребро CD куба лежит в грани SMP (это не нарушает общности). Введем систему координат $Axyz$, где оси Ax, Ay, Az направлены по ребрам куба $[AB)$, $[AD)$, $[AA_1)$ соответственно (рис. 6). Пусть $|AB| = m$. Очевидно, точка C имеет координаты $(m; m; 0)$. Если длина диагонали куба равна a, то его ребра имеют длину $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Из этого и $|SA| = 3$ легко вывести, что в выбранной нами системе координат точка S имеет координаты $(\sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Пусть

$$ax + by + cz + d = 0. \qquad (7)$$

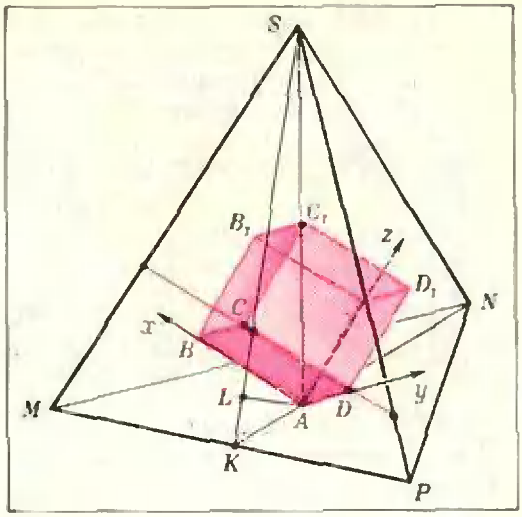


Рис. 6.

— уравнение плоскости грани SMP в выбранной нами системе координат. Так как (SMP) не проходит через начало координат, $d \neq 0$. Коэффициенты в уравнении (7) определяются (как это уже делалось выше) из того, что точки C, D и S принадлежат плоскости (7). Имеем

$$\begin{cases} ma + mb + d = 0 \\ mb + d = 0 \\ \sqrt{3}a + \sqrt{3}b + \sqrt{3}c + d = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$a = 0,\ b = -\frac{d}{m},\ c = \frac{\sqrt{3} - m}{m\sqrt{3}}d.$$

Подставив найденные значения a, b и c в (7), приходим к уравнению

$$\sqrt{3}y + (m - \sqrt{3})z - m\sqrt{3} = 0.$$

Воспользовавшись формулой (4), найдем расстояние от точки $A\ (0;\ 0;\ 0)$ до плоскости грани SMP:

$$\rho\ (A; (SMP)) = \frac{|-m\sqrt{3}|}{\sqrt{3 + (m - \sqrt{3})^2}} = \frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2 - 2m\sqrt{3} + 6}}. \qquad (8)$$

Определим теперь то же расстояние другим способом. Проведем в грани SMP апофему SK пирамиды и соединим точку K с точкой A. В $\triangle SAK$ проведем $[AL] \perp [SK]$; $|AL|$ — расстояние точки A до грани SMP (обоснуйте!).

Так как данная пирамида правильная,

$$|AK| = \frac{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{6} = \sqrt{2}.$$

Из $\triangle SAK$:

$$|SK| = \sqrt{11},$$

$$|AL| = \frac{|SA|\cdot|AK|}{|SK|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

Приравняв полученное в (8) выражение для $\rho(A;(SMP))$ найденному значению $|AL|$, получаем уравнение

$$\frac{m\sqrt{3}}{\sqrt{m^2-2m\sqrt{3}+6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{11}},$$

из которого и находим m:

$$m = \frac{6}{5}(2\sqrt{2}-\sqrt{3})\text{ см}.$$

Задачи

1. (МГУ, физфак, 1977). Длина ребра куба $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ $((AA_1)\|(BB_1)\|(CC_1)\|\|(DD_1))$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна $\frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина $[BF]$ равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

2. (МГУ, мехмат, 1977). Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды SC перпендикулярно плоскости основания и его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

3. (МФТИ, 1976). Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 3 см, а высота $4\sqrt{3}$ см. Вершина правильного тетраэдра лежит на отрезке, соединяющем центры граней ABC и $A_1B_1C_1$. Плоскость основания этого тетраэдра совпадает с плоскостью основания ABC призмы, а плоскость одной из боковых граней проходит через диагональ AB_1 боковой грани призмы. Найти длину ребра призмы.

4. (МФТИ, 1977). Графики функций $y=\frac{1}{2x}$ и $y=\frac{17}{3}-2x$, рассматриваемые в первой координатной четверти ($x>0$; $y>0$), пересекаются в точках A и B. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника перпендикулярна оси OX, две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB. Найти длины сторон треугольника.

5. (НГУ, 1977). В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, острый угол A которого имеет величину 60°, длины сторон AB и BC равны, соответственно, a и $2a$. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллелепипеда перпендикулярны плоскости основания, их длина равна a. Через вершины A, B_1 и D_1 параллелепипеда проведена плоскость. Найти расстояние от вершины C до этой плоскости.

6. (НГУ, 1977). Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, длина диагонали равна 10. На плоскости выбрана точка O, удаленная от вершин B и D на одинаковое расстояние, равное 13. Найти расстояние от точки O до ближайшей вершины прямоугольника.

7. (НГУ, 1977). В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны $3a$ и $4a$ соответственно. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания и имеет длину a. Через середины ребер AB, SC и точку, лежащую на ребре AC и удаленную от вершины A на расстояние a, проведена плоскость. Определить величину двугранного угла, образованного этой плоскостью и плоскостью основания.

Числовые ребусы

1. Поставьте вместо звездочек цифры так, чтобы получились правильно выполненные примеры на деление.

а)

```
_***   | **
  **   |--------
----   | *, ****
 _***
  ***
  ----
  _***
   ***
   ----
   _***
    ***
    ----
```

б)

```
_****** | **
 **     |----
------  | ***4
  _***
    **
   ---
   _**
    **
   ---
```

Л. Мочалов

2. Найдите наименьшую и наибольшую СКОРОСТЬ в следующих ребусах:

а) СКО·Р=ОСТЬ;
б) С·КОР=ОСТЬ;
в) СКОР : О=СТЬ;
г) СКОР : ОСТ=Ь;
д) С=КОРО : СТЬ.

3. Найдите наибольший ЗНАМЕНАТЕЛЬ, если

ЗНА+МЕНА=ТЕЛЬ.

(В примерах 2 и 3 одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.)

В. Радунский

Л. Баканина

О силах трения

Многие школьники, поступающие в вузы, часто испытывают затруднения при решении задач, в которых действуют силы трения.

Вспомним об основных особенностях сил так называемого *сухого трения* — трения между двумя твердыми телами. Эти силы возникают всегда при непосредственном соприкосновении тел, направлены вдоль поверхности соприкосновения и действуют на каждое из соприкасающихся тел, причем действуют так, чтобы препятствовать движению одного тела относительно другого — если это силы т р е н и я с к о л ь ж е н и я, или так, чтобы препятствовать самому возникновению этого движения — если речь идет о силах т р е н и я п о к о я.

Абсолютная величина силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$ зависит от вида трущихся поверхностей и силы $\vec{N}$ нормального давления одного тела на другое:

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| = \mu\left|\vec{N}\right|,$$

где μ — коэффициент трения.

Сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр. п.}}$ всегда уравновешивает все остальные силы, действующие на тело вдоль поверхности соприкосновения. Ее абсолютная величина может принимать любые значения от нуля до некоторого максимального значения $\left|\vec{F}_{\text{тр. п. max}}\right|$, которое обычно считают равным $\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right|$:

$$0 \leqslant \left|\vec{F}_{\text{тр. п.}}\right| \leqslant \left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right|.$$

При решении задач прежде всего необходимо разобраться, с какими именно силами трения — покоя или скольжения — мы имеем дело. Рассмотрим несколько конкретных задач.

З а д а ч а 1. *На горизонтальном столе лежит два бруска массой $M_1 = 7$ кг и $M_2 = 10$ кг, связанные нитью. Еще одна нить, привязанная к бруску массой M_1, переброшена через блок, укрепленный на краю стола, и к ней подвешен груз массой $m = 1$ кг (рис. 1). Коэффициент трения между брусками и столом $\mu = 0,1$. Определите натяжения обеих нитей и силы трения, действующие на каждый из брусков.*

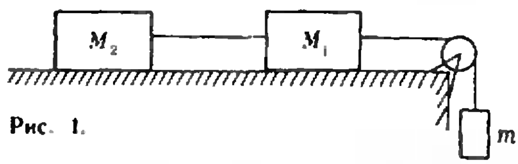


Рис. 1.

Во-первых, выясним, будут двигаться бруски или нет. Они могут начать двигаться под действием силы натяжения $\vec{T}_1$ правой нити, а она, по абсолютной величине, не может превысить силу тяжести груза массой m:

$$\left|\vec{T}_1\right| \leqslant m\left|\vec{g}\right| = 10\ \text{Н}.$$

Максимальное значение силы трения покоя для обоих брусков

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. п. max}}\right| = \mu\,(M_1 + M_2)\left|\vec{g}\right| = 17\ \text{Н}.$$

Так как $\left|\vec{T}_1\right| < \left|\vec{F}_{\text{тр. п. max}}\right|$, бруски покоятся. Очевидно, что покоится и груз массой m; следовательно,

$$\left|\vec{T}_1\right| = m\left|\vec{g}\right| = 10\ \text{Н}.$$

Теперь рассмотрим по отдельности бруски массой M_1 и M_2. На правый брусок действуют силы натяжения нитей $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр. 1}}$ (рис. 2)*).

*) Нас интересуют только те силы, которые дают горизонтальные проекции, отличные от нуля.

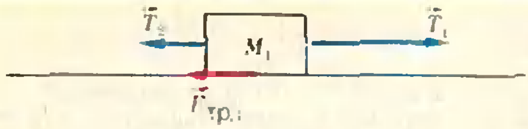


Рис. 2.

Максимальное значение силы трения

$$|\vec{F}_{тр.\,1\,max}| = \mu M_1 |\vec{g}| = 7\ \text{Н} < |\vec{T}_1| = 10\ \text{Н},$$

значит, одна только сила трения не может уравновесить брусок. Как только она достигнет своего наибольшего значения, натянется вторая нить — появится сила натяжения $\vec{T}_2$.

Первый брусок будет покоиться, если

$$|\vec{T}_1| = |\vec{F}_{тр.\,1}| + |\vec{T}_2|,$$

где

$$|\vec{F}_{тр.\,1}| = |\vec{F}_{тр.\,1\,max}| = 7\text{Н}.$$

Отсюда

$$|\vec{T}_2| = |\vec{T}_1| - |\vec{F}_{тр.\,1\,max}| = 3\ \text{Н}.$$

На второй брусок действуют две силы: сила натяжения нити $\vec{T}_2$ и сила трения $\vec{F}_{тр.\,2}$ (рис. 3). Поскольку

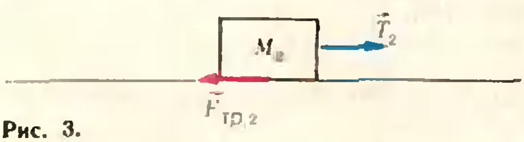


Рис. 3.

$$|\vec{F}_{тр.\,2\,max}| = \mu M_2 |\vec{g}| = 10\ \text{Н} > |\vec{T}_2| = 3\ \text{Н},$$

сила трения $\vec{F}_{тр.\,2}$ может уравновесить силу $\vec{T}_2$:

$$|\vec{F}_{тр.\,2}| = |\vec{T}_2| = 3\ \text{Н}.$$

Задача 2. *Брусок лежит на доске. Доску приподнимают за один край. Как зависит абсолютная величина силы трения, действующей на брусок, от угла наклона доски α (рис. 4)? Коэффициент трения между бруском и доской μ, масса бруска m.*

При достаточно малых углах наклона брусок покоится на доске. При этом сила трения покоя $\vec{F}_{тр.\,п.}$ уравновешивает силу $\vec{F}$ — составляющую силы тяжести бруска, направленную вдоль наклонной плоскости:

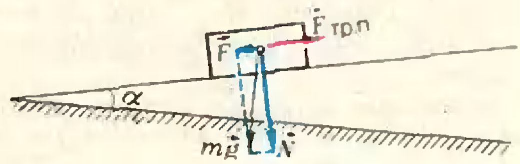


Рис. 4.

$$|\vec{F}_{тр.\,п.}| = |\vec{F}| = m|\vec{g}|\sin\alpha.$$

С увеличением угла α сила трения покоя растет, и при некотором угле α_0 она достигает своего максимального значения $|\vec{F}_{тр.\,п.max}| = |\vec{F}_{тр.\,ск.}| = \mu|\vec{N}|$:

$$m|\vec{g}|\sin\alpha_0 = \mu m|\vec{g}|\cos\alpha_0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu, \text{ и } |\vec{F}_{тр.\,п.\,max}| = m|\vec{g}|\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

При дальнейшем увеличении угла α тело скользит по доске, и сила трения является силой трения скольжения:

$$|\vec{F}_{тр.\,ск.}| = \mu|\vec{N}| = \mu m|\vec{g}|\cos\alpha.$$

График зависимости абсолютной величины силы трения от угла наклона

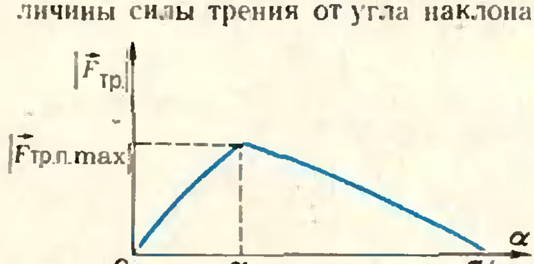


Рис. 5.

доски α показан на рисунке 5: до угла α_0 сила трения возрастает по закону синуса, а дальше она убывает по закону косинуса.

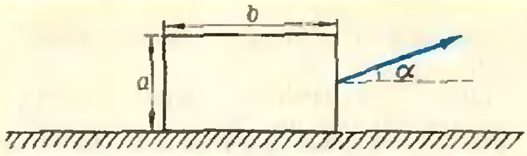


Рис. 6.

Задача 3. *Прямоугольный брусок, размеры которого показаны на рисунке 6, тянут равномерно по горизонтальной плоскости за веревку, угол наклона которой α можно менять. Коэффициент трения бруска о плоскость равен μ. При какой величине угла α_0 брусок начнет приподниматься?*

Рассмотрим все силы, которые действуют на брусок. Это сила натяжения веревки $\vec{T}$, сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}$ (равная по абсолютной величине силе нормального давления) и сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$ (так как брусок движется). При угле наклона α_0, когда брусок начнет приподниматься, силы $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$ проходят через точку A (рис. 7).

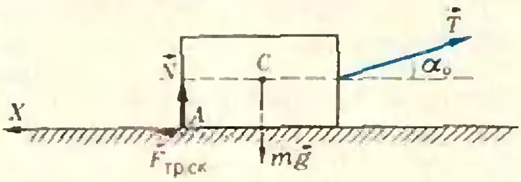


Рис. 7.

Так как брусок движется равномерно и прямолинейно, сумма действующих на него сил и сумма моментов этих сил относительно любой оси должны быть равны нулю. Следовательно, равны нулю сумма проекций всех сил на ось X:

$$\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| - \left|\vec{T}\right| \cos\alpha_0 = 0$$

и сумма моментов сил относительно центра тяжести C:

$$\left|\vec{T}\right| \sin\alpha_0 \cdot \frac{b}{2} - \left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| \frac{a}{2} - \left|\vec{N}\right| \frac{b}{2} = 0.$$

Из этих двух уравнений с учетом того, что $\left|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}\right| = \mu \left|\vec{N}\right|$, получаем

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{a}{b} + \frac{1}{\mu},$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b} + \frac{1}{\mu}\right).$$

Задача 4. *Ребенок скатывается с горки на санках. Высота горки $H = 15$ м, угол наклона к горизонту $\alpha = 30°$, а коэффициент трения линейно нарастает вдоль пути от $\mu_1 = 0$ у вершины горы до $\mu_2 = 0{,}4$ у подножия. Какую скорость будут иметь санки у подножия горы?*

Так как абсолютная величина силы трения скольжения при движении санок изменяется, а значит, движение санок не будет равноускоренным, задачу проще и удобнее решать с помощью закона сохранения энергии:

$$m\left|\vec{g}\right| H = \frac{mv^2}{2} + A.$$

Здесь $m|\vec{g}|H$ — потенциальная энергия санок на вершине горы, $mv^2/2$ — их кинетическая энергия у подножия и A — работа против силы трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр. ск.}}$.

Для определения A нарисуем график зависимости $|\vec{F}_{\text{тр. ск.}}|$ от пути s (рис. 8). У вершины горы

$$|\vec{F}_{\text{тр. ск. 1}}| = \mu_1 m |\vec{g}| \cos\alpha = 0,$$

у подножия

$$|\vec{F}_{\text{тр. ск. 2}}| = \mu_2 m |\vec{g}| \cos\alpha,$$

весь путь

$$s_0 = H/\sin\alpha.$$

Работа A численно равна площади

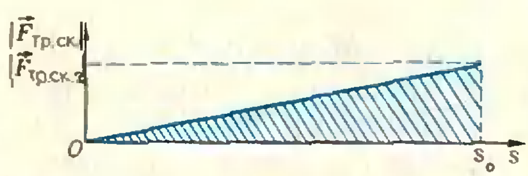


Рис. 8.

заштрихованного треугольника на рисунке 8:

$$A = \frac{1}{2} |\vec{F}_{\text{тр. ск. 2}}| s_0 = \frac{1}{2} \mu_2 m |\vec{g}| H \operatorname{ctg}\alpha.$$

Тогда из закона сохранения энер-

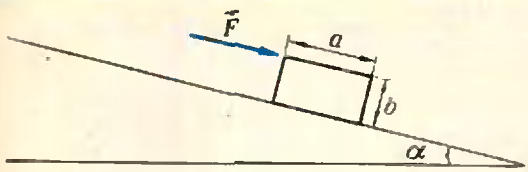


Рис. 9.

гии получаем:

$$|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{g}|H\left(1-\frac{\mu_2 \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)} \approx$$

$$\approx 14 \text{ м/с}.$$

Упражнения

1. Брусок массой m, размеры которого показаны на рисунке 9, стоит на наклонной плоскости с углом наклона α. На брусок начинает действовать сила $\vec{F}$, параллельная наклонной плоскости. При каком абсолютном значении этой силы брусок опрокинется? Известно, что соскальзывать с наклонной плоскости брусок при этом не будет.

2. Какую работу нужно затратить, чтобы втащить сани с грузом (общей массой $m=30$ кг) на горку высотой $H=10$ м? Угол наклона горки к горизонту $\alpha=30°$, а коэффициент трения между санями и горкой линейно убывает вдоль пути от $\mu_1=0{,}5$ у подножия до $\mu_2=0{,}1$ у вершины.

3. Мешок с мукой сползает без начальной скорости с высоты $H=2$ м по доске, наклоненной под углом $\alpha=45°$ к горизонту. После спуска мешок попадает на горизонтальную поверхность. Коэффициент трения мешка о доску и горизонтальную поверхность $\mu=0{,}5$. На каком расстоянии от конца доски мешок остановится?

Головоломки на суммы чисел и их квадратов

В каждой из фигур заполните кружочки последовательными натуральными числами 1, 2, 3,... так, чтобы были одинаковыми суммы чисел, а также суммы их квадратов:

а) по сторонам треугольника;

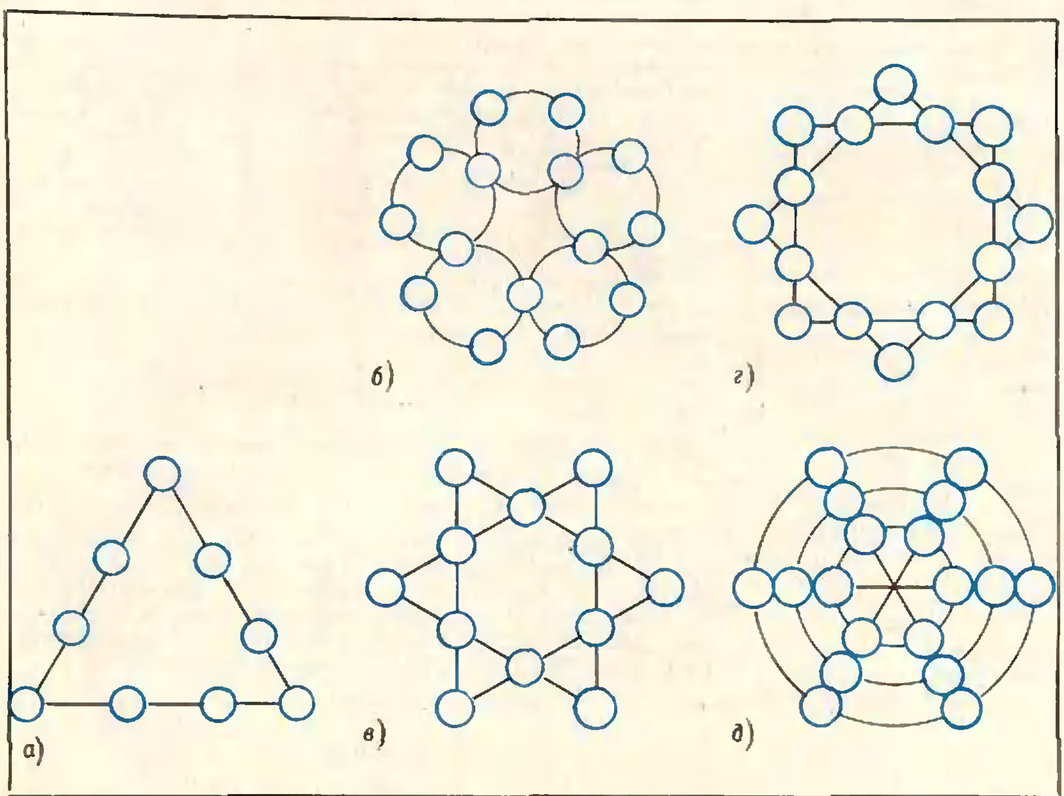
б) по окружностям;

в) по треугольникам;

г) по квадратам;

д) по окружностям и диаметрам.

В. Долгов



Интегралом — по счастливым билетам!

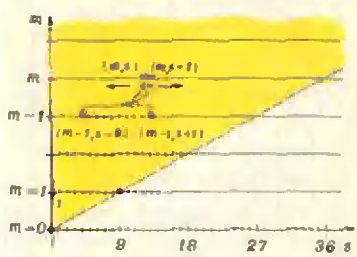
В редакцию пришло письмо от нашего старого читателя Б. Ивякина. В нем он задает следующий вопрос:

«В журнале было помещено несколько статей о счастливых билетах. Однако окончательной формулы ни в одной из них не получено. Хотя мне ясно, что задать число счастливых 2n-значных билетов простой формулой нельзя, мне все-таки кажется, что такая формула должна существовать. Прав я или нет?»

Обычно мы не отвечаем на такие неопределенные вопросы. Однако Борису повезло — после получения его письма мы получили сразу два ответа на его вопрос.

Мы думаем, что и другим читателям будет интересна содержащаяся в них формула.

(Напоминаем, что счастливым называется билет, у которого сумма первых трех цифр равна сумме последних трех.)



Много ли счастливых билетов? Часто ли они попадаются?

Этот вопрос уже обсуждался на страницах нашего журнала; было выяснено, что из миллиона билетов с шестизначными номерами (от 000 000 до 999 999) счастливых — 55 252, т. е. приблизительно один из каждых 18 билетов является счастливым.

Как водится у математиков, решалась и более общая задача — о количестве C_{2n} *счастливых 2n-значных чисел* (ясно, что под этим понимается; например, 0 035 120 115 — счастливое десятизначное число). Явной формулы для C_{2n} установлено не было — были получены лишь рекуррентные соотношения («Квант», 1976, № 12, с. 68).

Но вот в редакцию пришли два письма. Первое прислали в феврале М. Мнацаканян и А. Меликян, а второе — в марте — Р. Айдагулов. И в том, и в другом содержится одна и та же явная формула для C_{2n}. Вот эта замечательная формула:

$$C_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^{2n}dx. \qquad (1)$$

Интересно, что эта формула была получена совсем разными методами: М. Мнацаканян и А. Меликян пользуются производящими функциями (т. е. функциональным анализом), в то время как Р. Айдагулов опирается на метод тригонометрических сумм (аналитическая теория чисел). К сожалению, их доказательства, хотя и не сложные, все же выходят за рамки школьной математики и не могут быть опубликованы в нашем журнале. Сейчас мы дадим элементарное доказательство формулы (1), воспользовавшись рекуррентными соотношениями, о которых говорилось выше. Напомним их.

Для этого обозначим через $P_m(s)$ количество m-значных чисел ($m=1, 2, 3, \ldots$), сумма цифр каждого из которых равна s. Таким образом, $P_m(s)=0$ при $s<0$ и $s>9m$. Очевидно, $P_m(0)=1$.

Так как m-значное число с суммой цифр s получается из $(m-1)$-значного числа с суммой цифр j (где $s-9\leqslant j\leqslant s$) добавлением цифры $s-j$, можно написать

$$P_m(s)=\sum_{j=s-9}^{s}P_{m-1}(j).$$

Это и есть соотношения, о которых говорилось выше. Подставив в них $s+1$ вместо s, после вычитания получим

$$P_m(s+1)-P_m(s)=P_{m-1}(s+1)-P_{m-1}(s-9). \qquad (2)$$

Как пользоваться этим соотношением для вычисления $P_m(s)$? Взгляните на рис. 1. Если при фиксированном m известны все $P_{m-1}(s)$ (т. е. вся $(m-1)$-я строчка) и хотя бы один элемент $P_m(s_0)$ m-й строчки, то формула (2) позволяет, двигаясь вправо и влево, вычислить остальные элементы m-й строчки (поясните!). Но для любого m

$$P_m(0)=1 \qquad (2')$$

и

$$P_1(s)=\begin{cases}1, \text{ если } 0\leqslant s\leqslant 9,\\ 0, \text{ если } s<0 \text{ или } s>9.\end{cases} \qquad (2'')$$

Таким образом, формулы (2), (2′), (2″) позволяют вычислить все числа $P_m(s)$.

Возьмем теперь любое счастливое $2n$-значное число и заменим последние n цифр их дополнениями до 9. Тогда получится $2n$-значное число, сумма цифр которого равна $9n$. Легко понять, что

$$C_{2n} = P_{2n}(9n). \qquad (3)$$

Формула (3) дает возможность вычислить число C_{2n}.

Чтобы доказать (1), положим

$$\overline{P}_m(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^m \cos(9m-2s)x\,dx. \qquad (4)$$

Оказывается,

$$\overline{P}_m(s) = P_m(s). \qquad (5)$$

Из формул (3), (5) и (4) сразу следует (1). Таким образом, нам остается доказать (5), для чего достаточно проверить, что числа $\overline{P}_m(s)$ удовлетворяют равенствам (2), (2′), (2″). Подставляя (4) в (2), получим соотношение

$$\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^m[\cos(9m-2s-2)x-\cos(9m-2s)x]\,dx\right\} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^{m-1}[\cos(9m-9-2s-2)x-\cos(9m-9-2s+18)x]\,dx\right\},$$

равносильное соотношению

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin 10x}{\sin x}\right)^{m-1}\left[\frac{\sin 10x}{\sin x}\{\cos(9m-2s-2)x-\cos(9m-2s)x\}-\{\cos(9m-2s-11)x-\cos(9m-2s+9)x\}\right]dx=0,$$

которое верно (легко сосчитать, что тригонометрическое выражение в квадратной скобке тождественно равно нулю).

Таким образом, рекуррентное соотношение (2) для $\overline{P}_m(s)$ выполнено. Осталось проверить базис индукции (2′) и (2″). Второе из этих соотношений проверяется непосредственно (например, при $m=1$ и $s>9$ подынтегральное выражение преобразуется в сумму косинусов углов кратных x), а вот (2′) доказывается не так просто, и нам придется предпринять обходной маневр.

Вспомним, что вместо (2′) достаточно проверить любое другое соотношение на m-й строчке, например $\overline{P}_m(10m) = 0$.

Это уже не сложное (но громоздкое) упражнение на тригонометрические преобразования, которое мы оставим читателю. На этом доказательство формулы (5) заканчивается.

Внимательный читатель, наверное, задал себе вопрос — откуда взялась формула (4)? Конечно, формально можно считать, что мы ее угадали так же, как мы «угадали» формулу (1). На самом же деле формула (4), как и формула (1), была извлечена из письма М. Мнацаканяна и А. Меликяна, т. е. использовался готовый результат. Ведь наш метод доказательства, в отличие от метода Р. Айдагулова и метода М. Мнацаканяна и А. Меликяна, не дает возможности о б н а р у ж и т ь формулу (1), а только позволяет п р о в е р и т ь ее.

В заключение предлагаем читателям доказать следующее обобщение формулы (1) для числа счастливых $2n$-значных чисел в системе счисления по основанию k:

$$C^k_{2n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin kx}{\sin x}\right)^{2n}dx.$$

Царство смекалки

В этом году в издательстве «Наука» была переиздана одна из старых и очень хороших русских популярных книг по математике, по которой учились и которую любили наши деды — книга преподавателя гимназии Е. И. Игнатьева «В царстве смекалки».

Е. И. Игнатьева по праву можно назвать классиком занимательного математического жанра. В своей книге, первое издание которой вышло в 1908 году, он собрал большое количество разнообразных задач на сообразительность по арифметике и геометрии. Второе издание книги появилось в 1911 году. С тех пор эта книга не переиздавалась. Особенностью книги был ее литературный стиль, язык автора. Конечно, для настоящего издания некоторая трансформация задач и их условий была необходима. Однако, все же хотелось бы, чтобы классиков переиздавали более бережно — иначе неизбежна утрата аромата времени.

За 70 лет популярная математическая литература, изданная на русском языке, сильно обогатилась, и теперь многие задачи из книги Игнатьева широко известны. Тем не менее эта книга, несомненно, представляет большой интерес и сейчас — и не только исторический.

О целях книги, о том, как надо изучать математику и как надо учить математике, о роли задач на смекалку очень хорошо рассказал сам Игнатьев в своих «Предисловиях» к первому и второму изданиям книги. Ниже публикуются отрывки из них.

«Станет ли кто в наше время отрицать настоятельную необходимость самого широкого распространения и популяризации математических знаний? Первоначальные математические познания должны входить с самых ранних лет в наше образование и воспитание. Само собой разумеется при этом, что умственную самодеятельность, сообразительность и «смекалку» нельзя ни «вдолбить», ни «вложить» ни в чью голову. Результаты надежны лишь тогда, когда введение в область математических знаний совершается в легкой и приятной форме, на предметах и примерах обыденной и повседневной обстановки, подобранных с надлежащим остроумием и занимательностью.

* * *

Относительно математики в нашем обществе еще до сих пор существуют самые странные предрассудки. Одни говорят, что заниматься математикой могут только исключительные, одаренные совсем особыми способностями умы, другие утверждают, что для этого необходима особая, так сказать, «математическая память» для запоминания формул и т. д.

Нельзя, конечно, спорить против того, что существуют умы с резко выраженными склонностями к той или иной стороне умственной деятельности. Но точно так же никоим образом нельзя утверждать, что существуют хотя мало-мальски нормальные умы, которые совсем не способны к восприятию и полному усвоению необходимых математических знаний, хотя бы, скажем, в размерах курса средней школы.

Будем справедливы и признаем, наконец, что выражение «неспособен к математике» есть прежде всего горький продукт нашего неумения, а, пожалуй, иногда и легкомысленного нежелания поставить в семье и школе преподавание математики на должную высоту.

Еще менее можно говорить о необходимости для математики какой-то особой, специальной памяти для запоминания (зазубривания?) каких-то формул или правил, науку сознательной и последовательной логической мысли обращать в какой-то механический, бессознательный процесс. А между тем, как далеко может заходить дело в этом отношении, свидетельствует известный русский математик В. П. Ермаков. Вот что, между прочим, сообщал он в одном из своих докладов Киевскому физико-математическому обществу.

«Когда мне пришлось студентам читать интегральное исчисление, то в первый же год произошел эпизод, который навсегда сохранится в моей памяти.

Прочитавши часть теории, я для пояснения даю задачи. Я прошу студентов решать задачи в тетрадях. По мере решения я пишу полученные результаты на доске. Однажды для пояснения способов понижения биномиальных интегралов я написал на доске подходящую задачу. И вот вижу, что некоторые студенты вынимают из карманов какие-то тетрадки и смотрят в них.

— Что это?

— Общие формулы.

— Зачем?

— Нам прежний профессор советовал иметь список общих формул и по нему решать частные примеры. Ведь не станете же вы требовать, чтобы мы заучили на память все сорок общих формул.

— Заучивать в математике никаких формул не следует. Но я нахожу также неуместным пользование справочными пособиями и нахождение интегралов по общим формулам подстановкою в них данных значений показателей и коэффициентов. Ведь не с неба свалились к нам общие формулы; для вывода их вы употребили ряд рассуждений; применяйте те же рассуждения к частным примерам.

Таким образом оказалось возможным находить всякие интегралы и без общих формул. Пришлось, впрочем, некоторые выкладки видоизменить так, чтобы они непосредственно могли быть приложены к частным примерам.

Получилась еще и та выгода, что на каждом частном примере студенты повторяли все те же рассуждения, которые необходимы для вывода общей формулы. От частого повторения приобретался навык, и в результате — быстрота решения задач.

Этот эпизод заставил меня глубже вникнуть в сущность математики.

В молодых летах и я обращал все внимание на конечные результаты. Разбирая какое-нибудь доказательство, я заботился только о том, чтобы убедиться в его строгости. Вот добрался до окончательного результата, и довольно! Дальше я старался помнить окончательные выводы, весь же процесс доказательства быстро испарялся. Но потом забывались и формулы, а часто эти формулы оказывались необходимыми при дальнейших занятиях. Что же оставалось делать? Собирать библиотеку из справочных книг? Но на это не хватало средств, да и не было помещения для библиотеки. Поневоле приходилось припоминать самый процесс, при помощи которого выводилась та или иная формула. Таким образом, вместо формул, мало-помалу я пришел к самим доказательствам. Оказалось, что легче припомнить процесс математического мышления, чем голые формулы. Да и нет надобности помнить целиком весь процесс мышления, достаточно наметить этапные пункты, по которым должна идти наша мысль. И вот уже несколько лет, как я твержу своим слушателям: *в математике следует помнить не формулы, а процесс мышления.* [...]

Если выражен процесс математического мышления, то получение самих формул является уже делом чисто механическим. В механизме же алгебраических действий ученики должны приобрести навыки еще в средней школе.

Я пришел к тому убеждению, что указанный мною принцип должен быть применен и в средней школе...»

Продолжим мысль В. П. Ермакова и скажем: указанный принцип должен в особенности лечь в основание начального — как семейного, так и школьного — образования в области математических знаний. Не натаскивайте ни ребят, ни юношей на различных «табличках» сложения, вычитания, умножения, на механическом запоминании разных «правил» и формул, а прежде всего приучайте охотно и сознательно мыслить. Остальное приложится. Не мучьте никого длиннейшими скучнейшими и механическими вычислениями и упражнениями.

Когда они понадобятся кому-либо в жизни, он их проделает сам, — да да и это ныне есть всякие счетные машины, таблицы и иные приспособления.

* * *

Пытаясь перенести читателя в «царство смекалки», мы, конечно, не обольщаем себя надеждой, что смогли показать ему это царство во всей его прелести и полноте. Для этого понадобилась бы не одна такая книга: так велика и обширна область только тех отделов математики, которые можно подвести под общее заглавие «математических игр и развлечений».

Чтобы читатели смогли оценить нестандартный характер книги, мы публикуем из нее две задачи вместе с решениями самого Игнатьева.

1. Как гусь с аистом задачу решали

Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуй, сто гусей!» А передний старый гусь ему и отвечает: «Нет, нас не сто гусей! Вот, если б нас было еще столько, да еще полстолько, да еще четверть столько, да ты, гусь, то было бы сто гусей, а теперь... Вот и рассчитайка, сколько нас?»

Решение. Полетел одинокий гусь дальше и задумался. В самом деле, сколько же товарищей-гусей он встретил? Думал он, думал и с какой стороны ни принимался, никак не мог этой задачи решить. Вот увидел гусь на берегу пруда аиста: ходит длинноногий и лягушек ищет. Аист — птица важная и пользуется среди других птиц славой математика: по целым часам иногда неподвижно на одной ноге стоит и все думает, видно, задачи решает. Обрадовался гусь, слетел в пруд, подплыл к аисту и рассказал ему, как он стаю товарищей встретил и какую ему гусь-вожак загадку задал, а он никак этой задачи решить не может.

— Гм!... — откашлялся аист, — попробуем решить. Только будь внимателен и старайся понять. Слышишь?

— Слушаю и постараюсь! — ответил гусь.

— Ну вот. Как тебе сказали? Если бы к встречным гусям прибавить еще столько, да еще полстолько, да четверть столько, да тебя, гуся, то было бы сто? Так?

— Так! — ответил гусь.

— Теперь смотри, — сказал аист. — Вот что я тебе начерчу здесь на прибрежном песке.

Аист согнул шею и клювом провел черту, рядом такую же черту, потом половину такой же черты, затем четверть черты, да еще маленькую черточку, почти точку.

Получилось то, что показано на рисунке 1.

Рис. 1.

Гусь подплыл к самому берегу, вышел, переваливаясь, на песок, посмотрел, но ничего не понял.

—Понимаешь? — спросил аст.

— Нет еще! — ответил уныло гусь.

— Эх, ты! Ну, вот смотри: как тебе сказали, — стая, да еще стая, да половина стаи, да четверть стаи, да ты, гусь, — так я и нарисовал: черту, да еще черту, да полчерты, да четверть этой черты, да еще маленькую точку, т. е. тебя. Понял?

— Понял! — весело проговорил гусь.

— Если к встреченной тобою стае прибавить еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, да тебя, гуся, то сколько получится?

— Сто гусей!

— А без тебя сколько, значит, будет?

— Девяносто девять.

— Хорошо! Откинем на нашем чертеже точку, изображающую тебя, гуся, и обозначим, что остается 99 гусей.

Аист носом изобразил на песке то, что показано на рисунке 2.

Рис. 2.

— Теперь сообразинка, — продолжал аист, — четверть стаи да полстаи — сколько это будет четвертей?

Гусь задумался, посмотрел на линии на песке и сказал:

— Линия, изображающая полстаи, вдвое больше, чем линия четверти стаи, т. е. в половине заключается две четверти. Значит, половина да четверть стаи — это все равно, что три четверти стаи!

— Молодец! — похвалил гуся аист. — Ну, а в целой стае сколько четвертей?

— Конечно, четыре! — ответил гусь.

— Так! Но мы имеем здесь стаю, да еще стаю, да полстаи, да четверть стаи, и это составит 99 гусей. Значит, если перевести все на четверти, то сколько всех четвертей будет?

Гусь подумал и ответил

— Стая — это все равно что 4 четверти стаи, да еще стая — еще 4 четверти стаи, всего 8 четвертей; да в половине стаи 2 четверти: всего 10 четвертей; да еще четверть стаи: всего 11 четвертей стаи, и это составит 99 гусей.

Так! — сказал аист. — Теперь скажи, что же ты, в конце концов, получил?

— Я получил, — ответил гусь, — что в одиннадцати четвертях встреченной мною стаи заключается 99 гусей.

— А, значит, в одной четверти стаи сколько гусей?

Гусь поделил 99 на 11 и ответил:

— В четверти стаи — 9 гусей.

— Ну, а в целой стае сколько?

— В целой заключается четыре четверти... Я встретил *36 гусей* — радостно воскликнул гусь.

— Вот то-то и оно! — важно промолвил аист. — Сам, небось, не мог дойти!... Эх, ты... гусь!

2. Крестьянин и черт

Идет крестьянин и плачется: «Эхма! Жизнь моя горькая! Заела нужда совсем! Вот в кармане только несколько грошей медных болтается, да и те сейчас нужно отдать. И как это у других бывает, что на всякие свои деньги они еще деньги получают? Право, хоть бы кто помочь мне захотел».

Только успел это сказать, как глядь, а перед ним черт стоит.

— Что ж, — говорит, — если хочешь, я тебе помогу. И это совсем нетрудно. Вот видишь этот мост через реку?

— Вижу! — говорит крестьянин, а сам заробел.

— Ну, так стоит тебе перейти только через мост — у тебя будет вдвое больше денег, чем есть. Перейдешь назад, опять станет вдвое больше, чем было. И каждый раз, как ты будешь переходить мост, у тебя будет ровно вдвое больше денег, чем было до этого перехода.

— Ой ли? — говорит крестьянин.

— Верное слово! — уверяет черт. — Только, чур, уговор! За то, что я тебе удваиваю деньги, ты каждый раз, перейдя через мост, отдавай мне по 24 копейки. Иначе не согласен.

— Ну, что же, это не беда! — говорит крестьянин. — Раз деньги все будут удваиваться, так отчего же 24 копейки тебе каждый раз не дать? Нука, попробуем!

Перешел он через мост один раз, посчитал деньги. Действительно, стало вдвое больше. Бросил он 24 копейки черту и перешел через мост второй раз. Опять денег стало вдвое больше, чем перед этим. Отсчитал он 24 копейки, отдал черту и перешел через мост в третий раз. Денег стало снова вдвое больше. Но только и оказалось их ровнехонько 24 копейки, которые по уговору он должен был отдать черту. Отдал он их и остался без копейки.

Сколько же у крестьянина было денег сначала?

Р е ш е н и е. Задача разрешается очень легко, если только решение ее начать с конца, приняв во внимание, что после третьего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., которые он должен был отдать.

В самом деле, если после последнего перехода у крестьянина оказалось ровно 24 коп., то, значит, перед этим переходом у него было 12 коп. Но эти 12 коп. получились после того, как он отдал 24 коп., значит, всего денег у него было 36 коп. Следовательно, второй переход он начал с 18 коп., а эти 18 коп. получились у него после того, как он в первый раз перешел мост и отдал 24 коп. Значит, всего после первого перехода у него было денег 18 да 24 коп., т. е. 42 коп. Отсюда ясно, что перед тем, как первый раз вступить на мост, крестьянин имел в кармане 21 коп. собственных денег.

Прогадал крестьянин! Видно, что на чужой с[illegible]т всегда надо еще свой ум иметь.

Ю. Юшина

В лаборатории Вселенной

Несколько лет назад известный советский физик академик Л. А. Арцимович выступил в печати со статьей «Будущее принадлежит астрофизике». На чем был основан подобный прогноз?

Дело в том, что научно-технический прогресс требует все более широкого развертывания фундаментальных научных исследований для изучения основополагающих закономерностей окружающего нас мира. Одним из важнейших направлений таких исследований является изучение строения материи на всех уровнях ее существования — от элементарных частиц до гигантских космических миров и их систем. Много в этом направлении уже сделано, но еще больше предстоит сделать.

Для того чтобы сегодня проникнуть в неизвестное, обычных исследований уже недостаточно: необходимо изучать материю в предельных, экстремальных состояниях. Температуры в десятки и сотни миллионов градусов; давления в десятки и сотни миллионов атмосфер; чудовищные энергии, эквивалентные энергии взрыва термоядерного заряда с массой, равной десяткам и сотням тысяч солнечных масс; колоссальные плотности в десятки и сотни миллиардов тонн вещества в кубическом сантиметре — вот тот далеко не полный перечень явлений и условий, которые привлекают внимание современных физиков.

Воспроизвести подобные условия в земных лабораториях практически невозможно.

Лаборатория, где такие условия реализуются, существует. Это — лаборатория Вселенной. Здесь можно изучать такие физические процессы, такие состояния материи, такие источники энергии, которые обычным земным исследованиям совершенно недоступны.

«В «космической лаборатории» можно наблюдать проявление гигантских сил тяготения, исследовать вещество в условиях неосуществимых на Земле гравитационных и магнитных полей. Вместе с тем изучение мира звезд и галактик обогащает нас новыми знаниями о строении Вселенной, а это имеет важное значение для формирования научного мировоззрения...» — так пишет известный популяризатор астрономии Е. П. Левитан в своей новой книге «Астрофизика — школьникам» *).

Эта книга, как видно из ее названия, адресована школьникам, интересующимся астрономией и физикой, — эти две науки сегодня тесно связаны друг с другом.

«Астрофизика — школьникам» — отнюдь не учебник, она не повторяет школьного курса астрономии, хотя учитывает его построение и его основные идеи. Это — книга для чтения, причем углубленного, заинтересованного, требующего внимания и побуждающего к размышлениям.

Книга Левитана знакомит читателя с основами фундаментальных теорий и принципов астрофизики, с эволюционными идеями, которые буквально пронизывают современную астрофизику. В ней рассказывается о различных методах наблюдения космических объектов и теоретических исследованиях, о замечательных и во многом неожиданных открытиях, находящихся на переднем крае астрофизики XX века.

*) М., «Просвещение», 1977.

В частности, отдельные разделы книги посвящены активности ядер галактик, выбрасывающих огромные количества вещества и выделяющих колоссальные количества энергии; квазарам — поразительным своеобразным объектам, подобных которым ни астрономия, ни физика до недавнего времени не знали; нейтронным звездам (пульсарам), обладающим ядерной плотностью, а также совершенно необычным объектам, «сконструированным» теоретиками, — так называемым черным дырам, способным вбирать в себя окружающее вещество и, в то же время, не выпускать наружу ни частиц, ни электромагнитных излучений.

С интересом будет прочитана глава, посвященная геометрии Вселенной и структуре Метагалактики, а также современным представлениям о происхождении и эволюции Вселенной. Это и есть передовая линия современной астрофизики — открытия, которые удалось сделать в этой области в последние десятилетия, еще требуют теоретического и философского осмысления.

Одно из главных достоинств книги Левитана состоит в том, что астрономические знания преподносятся читателю не как законченные нерушимые истины — наука о Вселенной представлена в ее развитии и становлении. Обсуждаются сложные и нерешенные проблемы, дискуссионные вопросы, приводятся различные точки зрения, обрисовываются пути и перспективы дальнейших исследований.

Живо и интересно написанная книга, небольшая по объему, но весьма емкая по содержанию, несомненно будет способствовать более глубокому пониманию окружающего нас мира, современного состояния науки о Вселенной, формированию диалектико-материалистического мировоззрения.

В. Комаров

РФМШ при Якутском университете

Якутия — это край алмазов, северного сияния и вечной мерзлоты, морозной зимней ночи и ослепительного летнего солнца. В этот-то край шесть лет назад и приехал Исмаил Шахбазович Алиев, кандидат физико-математических наук, ученик академика Анатолия Ивановича Мальцева. Уже двадцать лет он работает со студентами, а находит он их... на школьной скамье.

Сначала была летняя физико-математическая школа на берегу великой реки Лены, в одном из пригородов города Якутска. В нее летом 1972 года собрались ребята более чем из тридцати районов Якутии. Целый месяц они жили в здании средней школы, отдыхали и работали — группа студентов ЯГУ проводила для них олимпиады, придумывала интересные задачки.

Победители олимпиад в летней школе и стали первыми учениками Республиканской физико-математической школы (РФМШ) при Якутском государственном университете.

Директор школы Исмаил Шахбазович много рассказывал нам о своем учителе — Анатолии Ивановиче Мальцеве, мы все его очень полюбили и назвали себя «шкимцами», что означает «ребята из школы им. Мальцева».

Школа-интернат расположена в студенческом городке университета. Мы занимаем всего-навсего один этаж студенческого общежития. В первый год существования в школе было всего три класса: восьмой, девятый и десятый. Но первое же выступление на Республиканской математической олимпиаде принесло команде ФМШ первое место. Этот успех дал понять окружающим, что мы существуем и нужны. С тех пор мы стараемся постоянно быть первыми.

В газете «Молодежь Якутии» ежегодно печатаются задачи заочной физико-математической и химической олимпиады, которые придумывают сами шкимцы и их наставники. По результатам этой олимпиады и идет новый набор в РФМШ. Все наши ребята-фымышата приезжают из районов, из таежных наслегов, они впервые начинают жизнь без родных, в незнакомом городе. Основная часть из них вообще впервые оказывается в городе. Все это, естественно, приводит к тому, что они начинают скучать. Но система воспитания, отношения между учениками и учителями, ритм жизни в нашей школе таковы, что к концу первого месяца ребята, увлекшись учебой, иногда даже забывают послать весточку домой.

Самое главное то, что в нашей школе ребят учат самостоятельно работать, мыслить, то есть делать свои собственные выводы из прочитанного и услышанного. Программа обучения по математике включает некоторые вопросы, изучаемые в университете. Так например, читаются курсы «Теория чисел», «Теория Галуа», «Теория графов», «Проективная геометрия», «Комбинаторика» и «Математическая логика». В школе работает науч-

▲ Праздник «Посвящение в шкимцы».

◄ В физическом кабинете.

▼ Летний лагерь. Старший друг рядом.

ное общество учащихся, которое мы называем ШНО — школьное научное общество. Кроме этого, в школе работает кружок «Квант», на котором разбираются самые интересные и трудные статьи из журнала.

Это все учебные занятия. Но жизнь шкимцев разнообразна и интересна. У нас есть традиционные праздники, которые придумали ребята первого выпуска и их учителя. Эти праздники очень своеобразны. Например, на праздник «Посвящение в шкимцы» приглашаются все выпускники, преподаватели и гости школы. Ребята каждого класса выступают с оригинальными захватывающими номерами, в которых они используют всю свою выдумку, математическую и физическую изобретательность. Есть и постоянный номер концертной программы «Защита фантастического проекта». Это значит, что ребята из каждого класса должны придумать проект нашей будущей физико-математической школы Якутии — какой она будет в 2000-м году, или как будет выглядеть ФМШ в подводном царстве или в космическом пространстве, как будут проходить уроки, как будут выглядеть учебные классы и т. д.

В конце праздника директор школы вручает школьникам ученические билеты, в которых напечатана эмблема нашей школы — знак конъюнкции, из которой, как лучи солнца, выходят струны народного музыкального инструмента Якутии — хомуса. Это символ того, что познавать глубины математики — все равно, что слушать прекрасную музыку.

Наша школа еще совсем юная по сравнению с такими, можно сказать, ветеранами, как Московская или Новосибирская ФМШ. Она похожа на молодой зелененький росточек великого знания, выросший на вечной мерзлоте. И эмблема нашей школы имеет цвет этого росточка. Этот удивительный цвет Исмаил Шахбазович назвал цветом математики — вечно юной, постоянно развивающейся науки.

Самое замечательное в истории нашей школы то, что создавалась она молодежью, в стремительном порыве, с комсомольским задором. Сейчас РФМШ и молодежь Якутского университета взаимно обогащают и дополняют друг друга. Именно из-за такой взаимосвязи кафедра высшей алгебры и геометрии в Якутском университете, возглавляемая Исмаилом Шахбазовичем, ныне стала комсомольской. Это явилось первым результатом создания нашей РФМШ.

В. Атласов, С. Зарипов, Н. Карамышева, Т. Слепцова, Г. Чернецова

10 лет Омскому НОУ

Омское городское научное общество учащихся было создано в 1968 году. База для функционирования этого общества вполне достаточная — в Омске сейчас 11 вузов. В совет кураторов НОУ входят представители горкома ВЛКСМ, гороно, областного совета молодых ученых, областного совета по научно-исследовательской работе студентов.

Основой Омского НОУ являются кружки при кафедрах вузов, работающие под руководством преподавателей и студентов (как правило, в прошлом — членов НОУ). В последнее время появились новые формы работы: вечерняя школа при институте инженеров железнодорожного транспорта, «четверговая» математическая школа при университете, а также два математических кружка в школах № 88 и № 118, запланирована организация летней математической школы с участием лекторов из омских вузов. Всего в секции математики НОУ работают примерно 700 школьников.

Наиболее активным членам НОУ по окончании школы выдается «направление-рекомендация» для поступления в вуз. (Например, в 1977 году только по секции математики таких рекомендаций было выдано более 60.) Как показывает десятилетний опыт, 90% из этих членов НОУ поступают в вузы Омска и становятся лучшими студентами, а остальные поступают в ведущие вузы других городов.

Таким образом, Омское НОУ дает школьникам города возможность совершенствовать свои знания в избранной области, приобретать умения и навыки творческой, научно-исследовательской и изобретательской деятельности.

В апреле этого года состоялась 10-я конференция НОУ. Она началась впервые проводимой к о м а н д н о й олимпиадой школ города по математике. На этой олимпиаде стоит остановиться подробнее.

Всюду уже стали традицией «личные» олимпиады учащихся, на которых каждый школьник «борется» сам за себя, — решает набор из 4—5 задач в одиночку. Студенческие же олимпиады в Омске проводятся по командному принципу: группа студентов вместе решает набор из 15—20 задач. Такая форма работы ближе к той, которая ждет выпускника вуза в научно-исследовательских институтах, лабораториях и т. п. И вот омичи решили посмотреть — а смогут ли школьники образовать пусть маленькую, но самостоятельную «научно-исследовательскую лабораторию»?

2-го апреля к 10 часам утра в актовом зале политехнического института собрались команды (по 5 участников) более чем 90 школ, причем некоторые школы прислали по две команды. Командам было предложено 18 задач и дано 4 часа на их решение. (Тексты большинства задач приведены в конце статьи, после каждой задачи указано, сколько очков давалось за ее полное решение и сколько команд эту задачу решили; «расценки» задач команды знали.)

Все задачи не решила ни одна команда. Это выяснилось на следующий день, когда жюри олимпиады, возглавляемое старшим преподавателем политехнического института В. Н. Сергеевым и доцентом Омского университета Г. Ш. Фридманом, закончило проверку решений. На первое место вышла команда школы № 69 (В. Буренков, Л. Иванова, С. Кокаулин, М. Ланкина и С. Степанов). Их работа произвела на жюри особенно приятное впечатление — ребята написали решения не всех задач, но зато написанные ими решения были верны. Такая способность критически оценить собственную работу — очень ценное качество исследователя; оно наверняка пригодится ребятам в будущем.

Второе место заняла первая команда школы № 88 (В. Князева, И. Лоскутов, О. Лучко, С. Ресенчук и А. Фильков), а третье — первая команда школы № 92 (Е. Каржавцев, В. Панфилов, В. Прасолов, Е. Растопчин и В. Троцук). Вторые команды этих школ выступили менее удачно. Упомянем еще о четвертом месте. На нем неожиданно оказалась «сборная» команда из двух школьников (!) П. Михеева (школа № 77) и А. Мажорова (школа № 88). Эти ребята были запасными в своих командах, а когда все пришли, они объединились в «команду» и написали работу — как выяснилось, удачно.

3 апреля состоялось заседание секции руководителей НОУ. Собравшиеся говорили о том, что их волновало: как лучше готовить подрастающее поколение к трудовой деятельности, прививать им навыки общественно полезной работы, как сделать их достойными членами нашего общества. Руководители секций рассказали о работе за год, обсудили планы на будущее. Видимо, надо расширить рамки НОУ, привлечь к работе не только вузы, но и школы, научно-исследовательские и конструкторские учреждения.

5 апреля на конференции работала секция математики. Было заслушано более 20 докладов, подготовленных учащимися в кружках при разных вузах города. Остановимся подробнее на докладе «Математические принципы построения стереоизображений» Е. Воробьевой (школа № 73). Лена рассказала, как можно без стереофотоаппарата и моделей рас-

На командной математической олимпиаде.

Жюри за работой.

Кубок и торт получает команда школы № 69 — победитель олимпиады.

Вручение премий лучшим докладчикам.

считывать и создавать стереопары с изображением пространственных моделей многогранников, наглядные объемные иллюстрации к школьному курсу стереометрии. Затем всем присутствующим раздали очки с поляризаторами, и на алюминиевом экране через стереопроектор было продемонстрировано более 30 снимков; это вызвало бурную реакцию зала.

По окончании работы секции состоялось подведение итогов олимпиады, награждение команд школ-победителей, награждение докладчиков, выдача «направлений-рекомендаций» в вуз. Команда школы № 69, занявшая первое место в олимпиаде, получила переходящий кубок горкома ВЛКСМ, первые три призера олимпиады (команды школ №№ 69, 88 и 92) были награждены грамотами горкома ВЛКСМ и ...тортами. За активное участие в конференции более 20 школьников были награждены дипломами обкома ВЛКСМ, обкома профсоюза работников просвещения, высшей школы и научных учреждений, областного совета по научно-исследовательской работе студентов.

Премии «Кванта» (номера журнала с памятными надписями) по итогам олимпиады получили команда школы № 69 — единственная, решившая задачу № 1, команда школы № 92—

за единственное решение задачи № 10, а также П. Михеев и А. Мажоров — за смелость, настойчивость и высокие результаты. За активное участие в конференции такие же премии получили Е. Воробьева, Н. Рыбина (школа № 125), С. Дорошевич (школа № 72) и ж.-д. школа № 13.

23 апреля в вузах Омска прошли заседания остальных секций юбилейной конференции НОУ. Учащиеся городских школ представили еще 92 доклада по физической, медицинской, биологической, инженерной и др. тематике. Многие доклады были настоящими исследованиями, семь докладов, подготовленных членами кружка при Сибирском автомобильно-дорожном институте, были отчетами об исследованиях работы двигателей.

Нередко школьники пробуют свои силы сразу в нескольких кружках. Например, Е. Булавко (школа № 112) сделала один доклад на тему «Определение основных токсичных компонентов в отработанных газах ДВС газохроматическим методом», а вместе со своей подругой Т. Кривопузковой — еще один, по определению содержания стронция в картофеле и растениях. Применение удобрений в сельском хозяйстве полезно, однако вместе с удобрениями в почву попадают, в частности, соли стронция, которые накапливаются в клубнях картофеля, в растениях. Определить содержание стронция позволяет спектральный метод, известный любому старшекласснику. Как конкретно это делается — и было рассказано и показано девушками, подготовившими доклад в кружке при сельскохозяйственном институте.

Куда пойдут дальше все эти ребята — они решат сами. Но можно быть уверенным в том, что этот выбор, как и выбор сотен других активных членов научного общества учащихся Омска, будет осознанным.

Задачи олимпиады

1. Пусть $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. Построить график функции $y = \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n}$ (5 очков, 1 команда).

2. Пусть в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ сосредоточены электрические заряды, соответственно, $q_1, q_2, \ldots, q_n$, и O — некоторая точка. В электростатике вектор

$$\vec{d} = \sum_{i=1}^{n} q_i \overrightarrow{OA_i}$$

называют *дипольным моментом* системы зарядов относительно точки O. Показать, что если сумма зарядов равна нулю, то дипольный момент не зависит от выбора точки O (3 очка, 0 команд).

3. Пусть $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_6x^6$ — некоторый многочлен шестой степени. Известно, что $f(k) = f(-k)$ для $k = 1, 2, 3$. Доказать, что $f(x)$ — четная функция (3 очка, 4 команды).

4. На сколько частей и как нужно разделить отрезок данной длины a, чтобы произведение длин всех полученных отрезков было наибольшим? (10 очков, 2 команды).

5. Пусть m и n — натуральные числа. Доказать что

$$\min\left\{\sqrt[m]{n};\ \sqrt[n]{m}\right\} \leqslant \sqrt[3]{3}$$

(2 очка, 0 команд).

6. Доказать, что три произведения $(1-a)b$, $(1-b)c$, $(1-c)a$, составленные из положительных чисел $a<1$, $b<1$, $c<1$, не могут одновременно быть больше 1/4 (2 очка, 3 команды).

8. Найти множество точек на плоскости, равноудаленных от двух отрезков ($-1 \leqslant x \leqslant 4$, $y=0$) и ($-6 \leqslant y \leqslant 2$, $x=0$). Расстояние до отрезка — расстояние до ближайшей точки отрезка (4 очка, 7 команд).

9. Найти остаток от деления многочлена $2x^{123756} + 2x^{27345} + x^{1384} - 3x^{792} + x^{29} - x^7$ на многочлен $x^2 - 1$ (4 очка, 2 команды).

10. Построить график функции $y = \ln(x + \ln(x + \ldots))$ (7 очков, 1 команда).

11. Найти объем фигуры, образованной при пересечении двух круговых цилиндров радиуса R, если их оси пересекаются друг с другом под прямым углом (6 очков, 0 команд).

13. В равнобедренный треугольник с площадью S вписана окружность. Угол при вершине треугольника α. При каком α площадь вписанной окружности максимальна? (3 очка, 3 команды).

14. Турист поднялся на гору, отдохнул там и спустился вниз по той же тропе. Подъем и отдых заняли больше суток, а все путешествие меньше двух суток. Доказать, что есть место, на котором турист находился в одно и то же время суток (3 очка, 4 команды).

15. Решить уравнение $(\sqrt{3}-1)\sin 3x + 2\sin 2x + 2\sin x = 0$ (5 очков, 6 команд).

16. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна CD, длины сторон $|AB| = a$, $|CD| = b$, $|AD| = c$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA. В каком отношении точка M делит сторону AD? (5 очков, 4 команды).

17. Решить уравнение

$$\left(\frac{9}{4}\right)^y - 3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^y + 2 = 0$$

(2 очка, 52 команды).

18. У трех геологов имеются 2 лошади. Расстояние до лагеря 13,5 км. Как быстро они могут добраться до лагеря, если скорость человека 4 км/ч, а лошади 6 км/ч? (На одну лошадь вдвоем садиться нельзя, лошадей без проводника пускать нельзя.) (5 очков, 6 команд).

А. Виленкин
Фото автора

Высокие степени

9. в) $10^{1000} < 9^{1111}$. Воспользуйтесь неравенством $\left(1+\frac{1}{9}\right)^9 < 3$.

Что такое π?

1. В ABD сторона AD лежит против тупого угла. 2. Постройте угол $\widehat{CAB_1}$, для которого $\widehat{CAB_1} = \widehat{C_1A_1B_1}$. Пусть $(AB_1)\cap(CB) = D$. Примените задачу 1. 3. Пусть P_i — проекция точки M_i на $[M_{i+1}N_{i+1}]$ ($i = 1, 2, \ldots, k-2$), P_{k-1} — проекция точки M_{k-1} на $[BC]$. Примените задачу 2 к треугольникам AM_1N_1, $M_1M_2P_1$, $M_2M_3P_2, \ldots$ $M_{k-2}M_{k-1}P_{k-2}$, $M_{k-1}BP_{k-1}$. 4. Из задачи 3 вытекает, что $|AN_1| < \frac{|AC|}{k}$. Если $\widehat{AOB} = \frac{180^\circ}{n}$ и $k = n+1$, то $|AC| = \frac{a_n}{2}$, $|N_1C| = \frac{a_{n+1}}{2}$ (a_i — сторона многоугольника Π_i). В этом случае $\frac{a_n}{2} - \frac{a_{n+1}}{2} < \frac{\frac{a_n}{2}}{n+2}$,

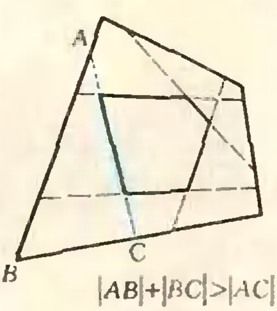


Рис. 1.

5. Идея доказательства показана на рисунке 1. При каждом «отрезании» периметр внешнего многоугольника уменьшается, так как ломаная заменяется отрезком.

Вооружившись методом координат

1. $\frac{11}{\sqrt{170}}$.

2. $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. $3\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$ см.

4. $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; $\frac{7}{3\sqrt{2}}$.

5. $a\sqrt{2}$.

6. $\frac{1}{5}\sqrt{1345}$.

7. $\arccos\frac{6}{7}$.

О силах трения

1. $|\vec{F}| = \frac{m|\vec{g}|}{2}\left(\frac{a}{b}\cos\alpha - \sin\alpha\right)$.

2. $A = m|\vec{g}|H\left(1 + \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right) \approx$
$\approx 4{,}5$ кДж.

3. $l = H\left(\frac{1}{\mu} - \operatorname{ctg}\alpha\right) \times$
$\times (\cos\alpha - \mu\sin\alpha)^2 = 0{,}25$ м.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 9, с. 29)

1. Указание. $1976 = 8 \cdot 13 \cdot 19$. 2. Существуют; это те и только те числа, которые оканчиваются (в десятичной записи) одной из четырех комбинаций цифр: 2326, 4826, 7326 или 9826. 3. Указание. Исходное число имеет вид $3n+2$, полным квадратом не является. 4. (3), (6, 5, 4), (11).

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант», № 10)

1. Отцу сейчас 40 лет.
2. См. рисунок 2.
3. Поскольку коробка — не куб, можно считать, что $a > b > c$. После развертки параллелепипеда задача сводится к такой плоской задаче для прямоугольника со сторонами длины $(a+c)$ и $(b+c)$: *отметить на сторонах прямоугольника по точке так, чтобы длина образовавшейся ломаной была минимальной.* Решением

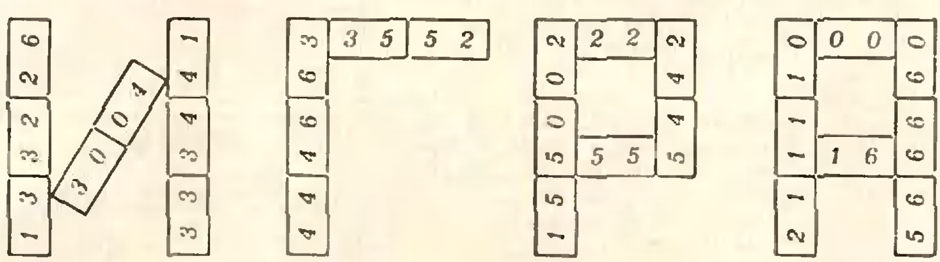


Рис. 2.

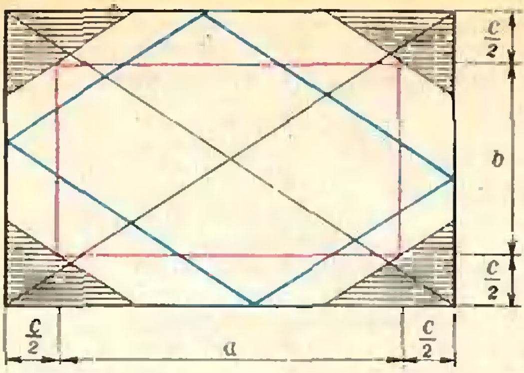


Рис. 3.

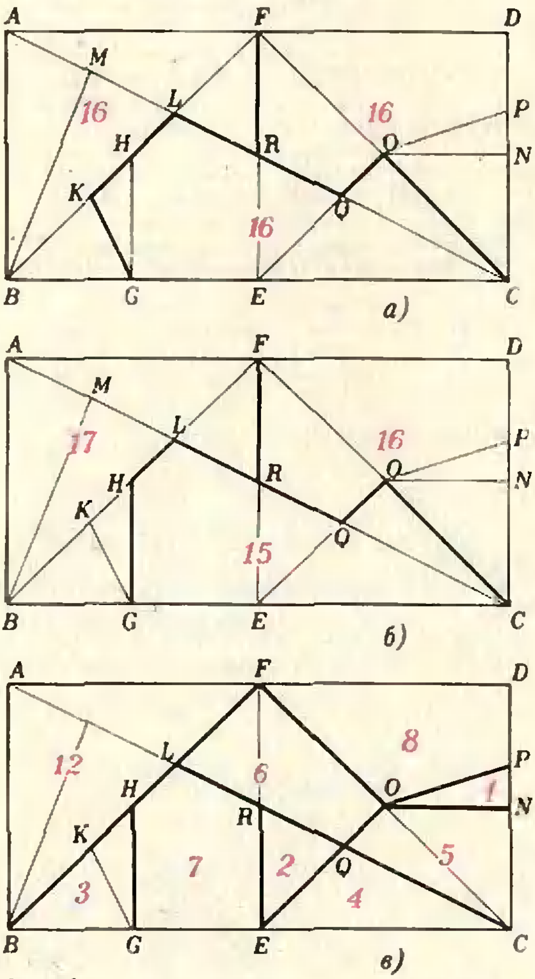


Рис. 4.

этой задачи является ломаная, звенья которой параллельны диагоналям прямоугольника, а длина равна

$$L = 2\sqrt{(a+c)^2 + (b+c)^2}$$

(см. рис. 3).

Для решения исходной задачи необходимо, чтобы все звенья ломаной пересекали границу прямоугольника со сторонами a и b. В этом случае должно выполняться следующее неравенство:

$ab > c^2$ (докажите это!).

4. Если два разных фасона платьев — одной и той же расцветки, то продавщица не сможет составить витрину так, как ей бы хотелось.

Математика — будущему рабочему
(см. «Квант» № 10, с. 90)

I курс

1. Биссектриса пересекает боковую сторону. 2. 2. 5. Самая легкая — корзина, самый тяжелый — саквояж.

II курс

1. Нельзя. 2. $a = 6$, $b = 4{,}5$.

III курс

1. 2. 2. $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. 4. Существует.

Стомахион
(см. «Квант» № 8)

2. а) См. рис. 4, *а*; б) см. рис. 4, *б*; в) см. рис. 4, *в*.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Бутусова, А. Ипатова

113035, Москва М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 28/VIII-78
Подписано в печать 9/X-78
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,48 Т-17250
Цена 30 коп. Заказ 1956 Тираж 301145

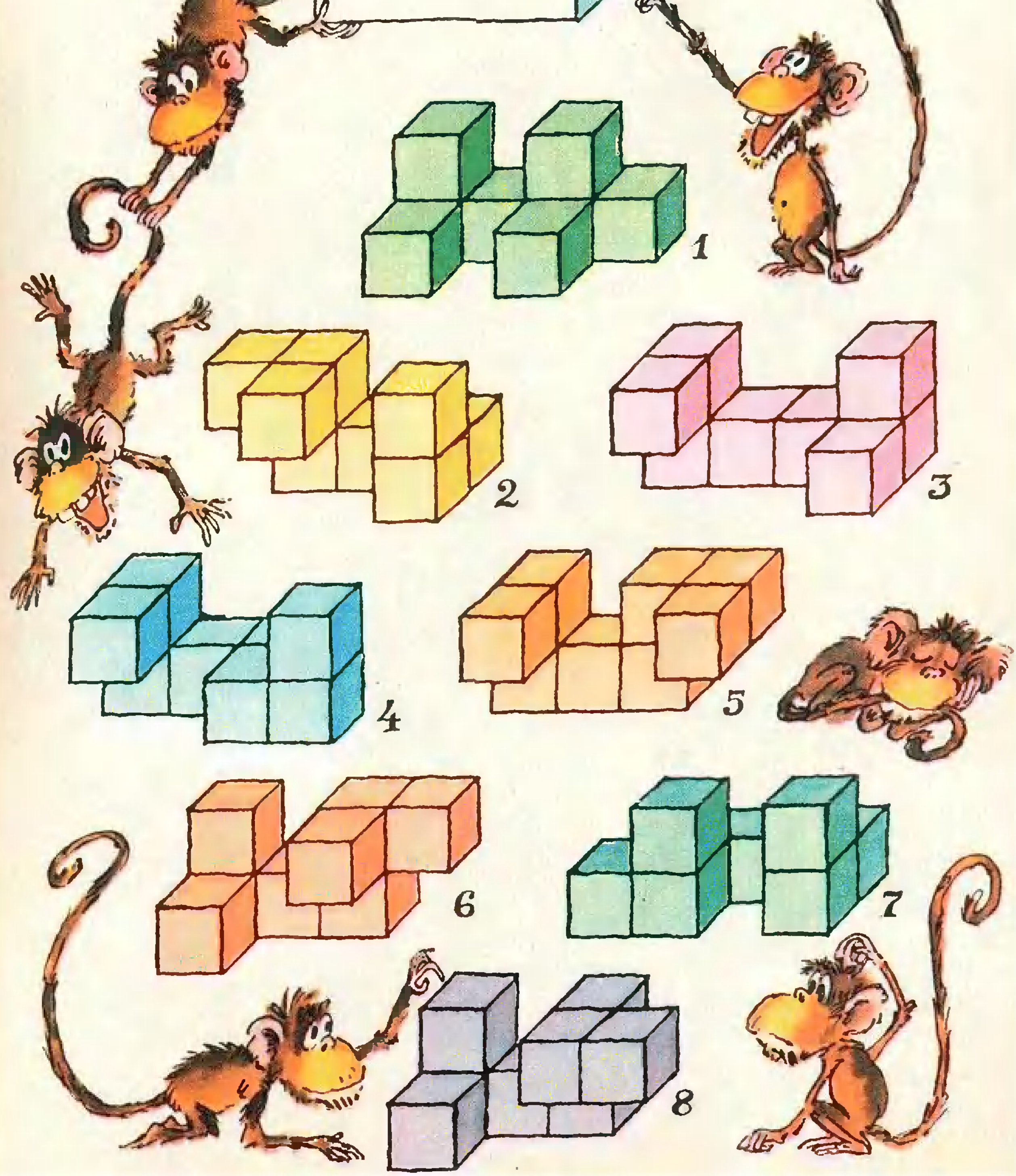
Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

СОБЕРИ КУБ

Сложите куб 4×4×4 из восьми элементов 1—8, изображенных на рисунке. Каждый элемент состоит из восьми кубиков размером 1×1×1.

Л. Мочалов



Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этом рисунке изображены фигуры, составленные из картонных моделей трилистного узла. Вверху слева показана отдельная модель трилистника, выполненная из картона в виде замысловато склеенных параллелепипедов. Рядом с ней (вверху справа) показана обычная схема трилистного узла.

Внизу слева — фигура, составленная из трех трилистных узлов, сгруппированных вокруг центрального кубика. Рядом — та же фигура, к которой добавлен четвертый трилистник; за ним кубик уж не виден. Об узлах вы можете прочитать в статье. Узел на столе «математика» («Квант» № 7 за 1975 г.).